



B 5

5

589

BIBLIOTECA NAZIONALE  
CENTRALE - FIRENZE











— 100 lines —

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

100 lines

# ENTRETIENS MATHÉMATIQUES

S U R

LES NOMBRES,  
L'ALGÈBRE,

LA GÉOMÉTRIE, LA TRIGONOMÉTRIE  
rectiligne, l'Optique, la Propagation de  
la Lumière, les Télescopes, les Microscop-  
pes, les Miroirs, l'Ombre & la Perspective.

Par le R. P. REGNAULT de la  
*Compagnie de JESUS.*

TOME SECOND.



A P A R I S,

Chez { CLOUSIER,  
DAVID, Fils, } Ruë S. Jacques.  
DURAND, }  
DAMONNEVILLE, Quay des Augustins.

---

M. DCC. XLIII.

*Avec Approbation & Privilege du Roy.*

B<sup>n</sup> 5.5.589



# T A B L E

D E S

ENTRETIENS

MATHÉMATIQUES

*Contenus dans le second Tome.*

SUR LA GÉOMÉTRIE.

**I. ENTRETIEN.** *Sur les Lignes.*

page, 1

**II. ENTRETIEN.** *Sur les Angles.* 52

**III. ENTRETIEN.** *Sur les Triangles.* 75

**IV. ENTRETIEN.** *Sur les Triangles comparés ensemble.* 86

**V. ENTRETIEN.** *Sur les côtés proportionnels dans les Triangles.* 99

**VI. ENTRETIEN.** *Sur les Quadrilatères.*  
Tome II. a

|  |     |
|--|-----|
| <i>terres.</i>   | 124 |
| VII. ENTRETIEN. <i>Sur les Quarrés en particulier.</i>                                       | 147 |
| VIII. ENTRETIEN. <i>Sur les Rectangles &amp; les Quarrés comparés ensemble.</i>              | 168 |
| IX. ENTRETIEN. <i>Sur les Poligones.</i>   | 179 |
| X. ENTRETIEN. <i>Sur les Poligones semblables.</i>   | 189 |
| XI. ENTRETIEN. <i>Sur les Cercles en particulier.</i>  | 207 |
| XII. ENTRETIEN. <i>Sur la transformation des Poligones en d'autres figures de même aire.</i> | 220 |
| XIII. ENTRETIEN. <i>Sur les Plans en général.</i>  | 229 |
| XIV. ENTRETIEN. <i>Sur les Prismes &amp; les Cylindres.</i>                                  | 239 |
| XV. ENTRETIEN. <i>Sur les Pyramides &amp; les Cônes.</i>                                     | 281 |
| XVI. ENTRETIEN. <i>Sur la Sphere.</i>  | 280 |

---

---

S U R   L A  
T R I G O N O M E T R I E.

---

- I. ENTRETIEN. *Sur la valeur  
des Sinus &  
des côtés des Figures rectilignes  
inscrites au cercle. page 314*
- II. ENTRETIEN. *Sur les Tables des  
Sinus , des Tangentes & des  
Sécantes. 347*
- III. ENTRETIEN. *Sur l'usage des  
Sinus , des Tangentes & des  
Sécantes. 363*
- IV. ENTRETIEN. *Sur la mesure des  
Plans irreguliers. 396*
- V. ENTRETIEN. *Sur la manière de  
lever une Carte. 416*

Fin de la Table.

teres.

124

VII. ENTRETIEN. *Sur les Quarrés  
en particulier.*

147

VIII. ENTRETIEN. *Sur les Rec-  
tangles & les Quarrés comparés  
ensemble.*

168

IX. ENTRETIEN. *Sur les Poligones.*

179

X. ENTRETIEN. *Sur les Poligones  
semblables.*

189

XI. ENTRETIEN. *Sur les Cercles en  
particulier.*

207

XII. ENTRETIEN. *Sur la transfor-  
mation des Poligones en d'autres  
figures de même aire.*

220

XIII. ENTRETIEN. *Sur les Plans en  
général.*

229

XIV. ENTRETIEN. *Sur les Prismes  
& les Cylindres.*

239

XV. ENTRETIEN. *Sur les Pyrami-  
des & les Cônes.*

281

XVI. ENTRETIEN. *Sur la Sphere.*

280



---

---

S U R L A  
T R I G O N O M E T R I E.

- I. ENTRETIEN. *Sur la valeur  
des Sinus &  
des côtés des Figures rectilignes  
inscrites au cercle.* page 314
- II. ENTRETIEN. *Sur les Tables des  
Sinus, des Tangentes & des  
Sécantes.* 347
- III. ENTRETIEN. *Sur l'usage des  
Sinus, des Tangentes & des  
Sécantes.* 363
- IV. ENTRETIEN. *Sur la mesure des  
Plans irreguliers.* 396
- V. ENTRETIEN. *Sur la manière de  
lever une Carte.* 416

Fin de la Table.

---

# ERRATA

*Du second Tome.*

Page 25. ligne 11. un équere, lisez, une équere, ligne 18. & 19. d'un équere font-long, lisez, d'une équere fort longue.

Page 152. ligne 12. ABE, lisez, ABC.

Page 166. en marge, Fig. 156, lisez, Fig. 157.

Page 250. ligne 16. de  $IF = B$ , lisez, de  $IF = B$  & de  $IK = D$ .

Page 372. ligne 16 à cause de, lisez, à cause des.

Page 381. ligne 17. BD, lisez, CD.

Page 384. ligne 7. BC, lisez, DC.



ENTRETIENS  
MATHÉMATIQUES  
SUR  
LA GÉOMÉTRIE.

---

I. ENTRETIEN.

*Sur les Lignes.*

EUDOXE.



H, ARISTE;  
vous voilà tout  
environné, ce  
semble, de fi-  
gures de Géométrie également  
nombreuses, distinctes, & pour  
ainsi dire, parlantes.

ARISTE. Ces figures, Eudoxe,  
je les regarde comme un des plus  
Tome II. A

précieux ornemens de mon Cabinet , parce qu'elles sont faites & rangées de manière à me rappeler tout d'un coup mes idées & mon système de Géométrie , système qui ayant été formé sur vos idées & vos écrits , doit ressembler beaucoup au vôtre.

*EUDOXE.* Je serai charmé que le vôtre me rappelle le mien.

*ARISTE.* Mais je crains que la passion que j'ai de retracer des vérités plus récentes pour moi que pour vous , ne vous cause quelque ennui.

*EUDOXE.* Je vois toujours avec un plaisir nouveau de longues suites de vérités naissantes les unes des autres , sur tout de vérités certaines , & qui ne laissent dans l'esprit nulle inquiétude , nulle apparence d'erreur.

*ARISTE.* Je m'expliquerai donc librement à la façon des Géomètres , par Axiomes ou vérités clai-

SUR LA GÉOMÉTRIE. 3

res d'elles-mêmes, par Définitions, par Propositions, par Problèmes, allant pas à pas des vérités qui me paroîtront plus simples à celles qui le seront moins.

*EUDOXE.* Et si je vous interromps, si je vous propose quelques Problèmes, ce sera sans déranger le fil de vos idées.

1. *ARISTE.* D'abord l'étendue comprend trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur.

2. Ainsi la Géométrie, qui consiste dans l'examen de ces dimensions, est la mesure de l'étendue.

AXIOMES.

3. Ce qui est, est. Rien de plus clair; ou plutôt rien de si clair.

4. La même chose ne peut être & n'être pas au même temps.

5. Le tout est plus grand qu'une de ses parties.

6. Le tout, & ses parties prises ensemble, sont la même chose.

4 I. ENTRETIEN

7. Deux grandeurs égales à une troisième sont égales entr'elles.

8. Deux grandeurs qui jointes séparément avec une troisième ou avec deux égales, font même grandeur, sont égales entr'elles.

9. A grandeurs égales, ajoutez grandeurs égales: les tous seront égaux.

10. De grandeurs égales, ôtez grandeurs égales: les restes seront égaux.

11. Deux grandeurs sont inégales, si jointes séparément avec une troisième, elles font des grandeurs inégales; & si l'on joint à une grandeur deux grandeurs inégales, la plus grande donnera la plus grande quantité. Enfin, les moitiés sont entre elles comme les tous.

DEFINITIONS.

12. Le point Mathématique

SUR LA GÉOMÉTRIE. 5

est une portion d'étendue si petite, qu'on la suppose sans parties.

13. Une suite continue de points est une longueur.

14. La ligne est une longueur considérée précisément comme longueur.

15. La ligne droite AB est la plus courte qu'on puisse tirer entre deux points A & B. *Fig. 1.*

16. La ligne courbe est une ligne qui s'écarte de la ligne droite en allant d'un point à un autre, comme ACB, ou ADB qui pour aller de A en B s'écarte vers D. *Fig. 2.*

17. La ligne circulaire ou la circonférence GHI est une ligne courbe qui a tous ses points également éloignés d'un point intérieur L, qu'on nomme *centre*. *Fig. 3.*

18. Ainsi, toutes les lignes droites tirées du centre à la circonférence sont égales; & comme le rayon LG est une ligne de cette

6 I. ENTRETIEN

espèce, tous les rayons du même cercle ou de cercles égaux sont égaux.

19. On entend ici par cercle la circonférence ou la ligne circulaire GHI. L'arc GH en est une portion.

20. J'appelle simplement proposition, comme j'ai fait ailleurs (a), celle qui ne fait qu'exprimer une vérité à démontrer.

21. Je nomme Problème, une proposition qui dit quelque chose à construire & à démontrer.

Cela supposé, je commence par la recherche des propriétés de la ligne droite qui est la plus simple. La ligne droite peut être perpendiculaire, oblique, parallèle.

*La Perpendiculaire,*

22. C'est une ligne droite qui coupe une ligne droite sans pan-

(a) Calcul Littéral, N. 9.



## PROPOSITION I.

23. *Chaque point de la perpendiculaire est également éloigné de deux points opposés de la ligne qu'elle coupe.*

Soit la perpendiculaire AB ou Fig. 4.  
AC coupant DE par le milieu.

1°. Si chaque point de AB va s'approchant de l'un des points opposés D, E, par exemple de E; AB sera perpendiculaire sans l'être, puisqu'elle panchera comme BF.

2°. Si un point seul G de la perpendiculaire AC est plus proche de l'un des points opposés, par exemple, de E; AC sera droite \* \* N. 22. sans l'être \*, puisqu'elle s'écartera \* N. 16. de la droite en G.

Or une chose ne peut être & n'être pas au même temps \*: donc \* N. 4. chaque point de la perpendiculaire est également éloigné de

8 I. ENTRETEN

deux points opposés de la ligne qu'elle coupe.

24. EUDOXE. Ainsi, une ligne dont chaque point est également éloigné de deux points opposés d'une ligne droite, est une perpendiculaire.

ARISTE. Sans doute.

PROPOSITION II.

25. *La position d'une perpendiculaire dépend de deux de ses points.*

Fig. 5. Si le point B, aussi-bien que le point A, se trouve également éloigné des points opposés C, D; je dis que la droite ABE est perpendiculaire.

Voulez-vous qu'un autre point E de la droite ABE soit plus proche de C que de D, par exemple, en F?  $ABE = ABF$  sera une ligne courbe\* contre la supposition, puisque ABF allant de A en F, s'écartera de la droite AF, ou de la droite ABE.

\*N. 16.

Donc chacun des points de la droite ABE étant également éloigné des points opposés C, D, elle est perpendiculaire \*. \*N. 24.

26. EUDOXE. Ainsi, dès que deux points d'une ligne sont également éloignés, chacun, de deux points de la ligne qu'elle coupe, tous le sont, & elle est perpendiculaire.

## PROPOSITION III.

27. ARISTE. Et si une ligne AC Fig. 6. est perpendiculaire sur une ligne DE, celle-ci l'est sur celle là.

Comme les points A, C, sont également éloignés des points D, E \*, les points D, E, le sont \*N. 23. des points A, C : donc, de même que AC est perpendiculaire sur DE, DE l'est sur AC.

## PROBLÈME I.

28. EUDOXE. D'un point donné Fig. 7. A hors d'une ligne BC, tirer une

# 10 I. ENTRETIEN

*perpendiculaire sur cette ligne BC.*

ARISTE. 1°. Du point donné A, comme centre, je décris un arc de cercle coupant en deux points B, C, la ligne donnée.

2°. Avec même ouverture de compas, mais plus petite que la première, je décris des deux points de section B, C, deux arcs qui se coupent dans un point D.

3°. Par les points A, D, je mène la droite ADE; & je dis qu'elle est perpendiculaire.

Le point A est également éloigné des deux points B, C \*, puisque la distance de part & d'autre a pour mesure des rayons AB, AC, du même cercle. Le point D l'est de même, sa distance ayant pour mesure des rayons BD, CD, de cercles égaux, par la construction. Or une ligne qui a deux points également éloignés de deux points d'une ligne, est

\* N. 18.

\* N. 26. perpendiculaire sur cette ligne \*;

SUR LA GÉOMÉTRIE. 11  
donc ADE est perpendiculaire.

S'il falloit abaisser la perpendiculaire sur l'extrémité E d'une ligne CE, l'on pourroit prolonger la ligne CE en B.

## PROBLÈME II.

29. EUDOXE. D'un point donné *Fig. 2.*  
A dans une ligne BAC, élever une  
perpendiculaire.

ARISTE. 1°. Du point A, je décris un arc qui coupe en deux points B, C, la ligne donnée.

2°. De ces points, je décris avec même ouverture de compas deux arcs qui se coupent en D.

3°. J'éleve la droite AD, & je dis qu'elle est perpendiculaire.

Le point A est également éloigné des points opposés B, C \*, \* N. 18; puisque sa distance est mesurée par les rayons AB, AC, du même cercle; le point D l'est de même par la même raison: donc AD est perpendiculaire \*.

\* N. 20.

## PROBLÈME III.

30. *EUDOXE. Diviser une ligne en deux parties égales.*

Fig. 9. *ARISTE.* 1°. Des points A, B ; je décris avec même ouverture deux arcs qui se coupent en deux points C, D.

2°. J'abaisse la ligne CD, qui coupe en E la ligne donnée AB ; & je dis que  $EB = EA$ .

Je tire les rayons égaux AC ;  
\*N.18. AD, BC, BD\*.

Les deux points C, D sont également éloignés des points oppo-  
\*N.18. sés A, B\* : donc CED est per-

\*N.26. pendiculaire sur AB\* : donc le point E de la ligne CED est également éloigné des points A, B\* :  
\*N.23. donc  $EB = EA$ .

*EUDOXE.* Par la même opération, avec même ouverture de compas, on partagera, ce semble, une ligne en 4, en 8, en 16, &c. Continuez de nous éclairer.

## PROPOSITION IV.

31. *ARISTE.* D'un point donné hors d'une ligne, on ne tire qu'une perpendiculaire.

Soit AB perpendiculaire sur Fig. 10.  
CD: je dis que AE ne l'est pas.

Le point A étant également éloigné des points opposés C, D, le point E, le feroit aussi\*: or, \*N.23; E ne l'est pas, puisqu'il se trouve entre C & B, qui l'est\*: donc \*N.23; AE n'est pas perpendiculaire.

*EUDOXE.* Ainsi, deux perpendiculaires sur une même ligne étant prolongées à l'infini, ne se rencontreront jamais.

*ARISTE.* Autrement on abaisseroit du point de rencontre A deux perpendiculaires AB, AE, sur la même ligne CD, ce qui n'est pas possible\*.

\*N.31;

## PROPOSITION V.

32. D'un point donné dans une

# 14 I. ENTRETEN

*ligne , on n'éleve pas deux perpendiculaires.*

**Fig. 11.** Soit AB perpendiculaire sur CD : je dis que AE ne l'est pas.

AB est également éloignée des  
**\*N.23.** points C, D \* : donc AE qui se trouve entre AB & AD, panche vers D : donc AE n'est pas per-  
**\*N.22.** pendiculaire \*.

## L'Oblique ,

**Fig. 12.** 33. C'est une ligne AE qui panche vers l'un des côtés de la ligne CE qu'elle rencontre.

Perpendicule AB , ou perpendiculaire, c'est ici même chose.

J'appelle éloignement du perpendicule une ligne droite BE comprise entre le pied de la perpendiculaire & le pied de l'oblique , parties du même point A.

Cela supposé ;



## PROPOSITION I.

34. *La perpendiculaire est la plus courte des lignes tirées d'un point à une ligne.*

Soit la perpendiculaire AB avec *Fig. 134*  
l'oblique AD ou AC.

1°. Je prolonge AB en G, de moitié. Ainsi  $BA = BG$ .

2°. Je tire l'oblique\* DG; & comme BDC est perpendiculaire sur la perpendiculaire AB+BG\*, \*N.27:  
 $DG = DA$  \*. \*N.23:

Enfin, je dis que  $AB < AD$ .

$ABG < ADG$  \*: donc AB est \*N.15:  
moitié d'une ligne plus courte,  
& AD moitié d'une ligne plus longue, donc  $AB < AD$ .

## PROPOSITION II.

35. *Les obliques tirées du même point sur la même ligne, sont d'autant plus longues, qu'elles sont plus éloignées de la perpendiculaire.*

Je dis que l'oblique  $AC > AD$  *Fig. 135*

moins éloignée de la perpendiculaire AB.

1°.  $AD = DG$ , &  $AC = CG$  \*.

\*N.II. 2°.  $ACE > ADE$  \*. Ainsi ,

\*N.II.  $ACEG > ADEG$  \*; car à la même chose, ajoutez choses inégales: la plus grande fait la plus grande quantité.

3°. Par le même principe ;  
—  $GED > GD$ , & par conséquent  
 $ADEG > ADG$ .

Donc  $ACEG > ADEG > ADG$ .

Donc AC est moitié d'une ligne plus longue , & AD, moitié d'une ligne plus courte.

Donc  $AC > AD$ .

Par conséquent , les obliques parties du même point , & également éloignées de la perpendiculaire , sont égales. De-là ,

# I.

Fig. 14. 36. Deux obliques AE, AF, appuyées sur le même point A d'une perpendiculaire.

perpendiculaire  $AB$ , avec même éloignement  $EB = BF$  du perpendicule, sont égales.

$AE$  &  $AF$  tirées du même point  $A$ , sont également éloignées de la perpendiculaire  $AB$ , puisque  $EB = FB$ : donc  $AE$  &  $AF$  sont égales\*.

\*N.35;

D'ailleurs le point  $B$  de la perpendiculaire  $AB$  étant également éloigné des points  $E, F$ , puisque  $EB = FB$ ;  $A$  l'est de même\*: \*N.32; donc  $AE = AF$ .

Par conséquent, si les perpendiculaires sont égales, & les éloignemens du perpendicule, égaux; les obliques sont égales.

## I I.

37. *Si l'y a égalité de perpendiculaires avec égalité d'obliques, les éloignemens du perpendicule sont égaux.*

Soient la perpendiculaire com- Fig. 14;  
mune  $AB$ , & les obliques égales

AE, AF: je dis que  $BE = BF$ .

Si  $BE >$  ou  $< BF$ , l'oblique

$AE >$  ou  $< AF^*$ : or  $AE = AF$ :

\*N.35. donc  $BE = BF$ .

## III.

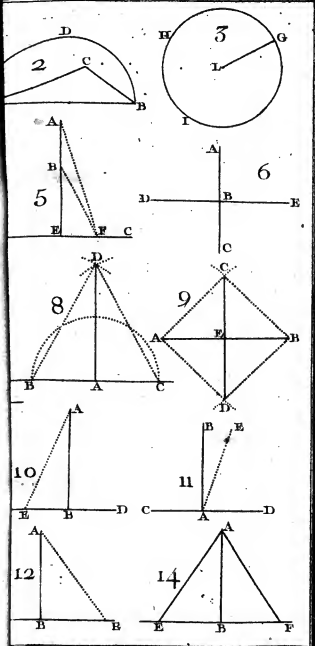
Fig. 15. 38. La perpendiculaire est la même de part & d'autre, quand les obliques sont égales, & les éloignemens du perpendicule égaux.

Soient CE & CF, obliques égales; BF & BE, éloignemens du perpendicule égaux: je dis que BC est la perpendiculaire de part & d'autre.

Si BC étant perpendiculaire d'une part, BCA l'étoit de l'autre, CE seroit l'oblique d'une part, tandis que FA seroit l'oblique égale de l'autre part: or\*,  $FA > FC = CE$ .

Donc BC est la perpendiculaire de part & d'autre.

De-là, si les obliques sont éga-





SUR LA GÉOMÉTRIE. 19  
 les, & les éloignemens du per-  
 pendiculaire égaux, les perpendicu-  
 laires sont égales.

# IV.

39. Si l'éloignement du perpendi-  
 cule est le même, mais l'oblique plus  
 grande, la perpendiculaire est plus  
 grande.

Supposons  $BF = BE$ , mais  $AF$  *Fig. 15.*  
 $> CE$ , Je dis que  $AB > CB$ .

1°. Si  $AB = CB$ ,  $AF = CF$   
 $= CE$  \*.

2°. Si  $AB < CB$ ,  $AF < CF$ ,  
 ou  $CE$  \*.

Donc si  $AF > CE$ ,  $AB >$   
 $CB$ .

Enfin, venons aux paralleles.

## Les Paralleles.

40. Ce sont des lignes qui étant  
 mises à côté les unes des autres,  
 sont également éloignées dans  
 tous leurs points correspondants.  
 De-là.

Bij

## PROPOSITION I.

*Fig. 16.* 41. Dès que deux points A, B, d'une ligne droite ABE, sont également éloignés de deux points C, D, d'une autre CDF mise à côté, les deux lignes sont parallèles.

S'il se trouvoit dans une des lignes un point G qui s'écartât, la ligne ne seroit plus droite contre l'hypothèse \*.  
 \*N. 16. Donc chacune des lignes ayant tous ses points également éloignés des points correspondants de l'autre, elles sont  
 \*N. 40. parallèles \*.

Par conséquent, si l'on suppose que deux lignes aient deux points communs, ce sera même ligne.

42. EUDOXE. Ainsi, deux lignes droites ne se couperont pas en deux points: autrement, elles auroient deux points communs; & ce seroit la même ligne.

Mais avant que d'aller plus loin,



il s'agit de tirer par un point donné B une parallèle à une ligne donnée  $x$ .

ARISTE. 1°. Du point donné B, *Fig. 17.* j'abaisse une perpendiculaire BF sur la ligne donnée  $x$ .

2°. Sur la ligne donnée  $x$ , j'élève une perpendiculaire  $GC = BF$ .

3°. Je mene par B, C, une ligne droite  $z$ .

Et je dis que  $z$  est parallèle à  $x$ .

$z$  étant tirée par les extrémités B, C, de deux perpendiculaires égales FB, GC, est également éloignée de  $x$  dans deux points, & par conséquent dans tous ses points \* : donc  $z$  est parallèle à  $x$ .

Avançons.

\* N. 41.

## PROPOSITION II.

43. Deux parallèles prolongées à l'infini ne se toucheront jamais.

Elles seront toujours également éloignées l'une de l'autre \* : donc, &c.

\* N. 40.

## PROPOSITION III.

*Fig. 18. 44. Deux perpendiculaires AB, CD, sur une ligne EF sont parallèles.*

Si l'une étoit inclinée vers l'autre, elles se rencontreroient, comme AD, CD; & d'un point D, l'on tireroit deux perpendiculaires DA, DC sur une ligne droite EF, ce qui est impossible\*.

## PROPOSITION IV.

*45. Dès qu'une ligne est perpendiculaire sur deux lignes, elles sont parallèles.*

Les deux lignes jointes par une perpendiculaire sont perpendiculaires sur elle\*: or deux perpendiculaires sur une ligne sont parallèles\*.

## PROPOSITION V.

*Eg. 19. 46. Entre deux parallèles CD, EF, une ligne perpendiculaire sur*

*l'une l'est sur l'autre.*

Je dis que AB perpendiculaire sur CD, l'est sur EF.

Si AB perpendiculaire sur CD, ne l'étoit pas sur EF, EF ne le feroit pas sur AB<sup>\*</sup>: donc EF inclinée, comme GH, s'approcheroit de CD: donc CD & EF feroient parallèles sans l'être<sup>\*</sup>, ce qui ne se peut<sup>\*\*</sup>: donc AB perpendiculaire sur CD, l'est sur EF.<sup>\*N.27.</sup><sup>\*N.40.</sup><sup>\*\*N.4.</sup>

# PROPOSITION VI.

47. Deux lignes  $x, z$ , parallèles à une troisième,  $y$ , sont parallèles entre elles. Fig. 202

Soit CBD perpendiculaire sur  $x$ : elle l'est sur  $y$  parallèle, & par conséquent sur  $z$ <sup>\*</sup>: donc  $x$  &  $z$  sont perpendiculaires sur CBD<sup>\*</sup>: or deux perpendiculaires sur une ligne sont parallèles<sup>\*</sup>. \*N.40.

## PROPOSITION VII.

*Fig. 21. 48. Enfin deux lignes droites sont parallèles, quand elles sont jointes par deux lignes droites, intermédiaires, égales, dont l'une est perpendiculaire sur la première, & l'autre sur la seconde.*

Soient AB & CD égales, & perpendiculaires, AB sur la ligne S; & CD, sur la ligne T.

Je dis que S, T jointes par les intermédiaires AB, CD, sont parallèles.

Voulez-vous que T soit inclinée, comme VX? AB doit répondre à AD; & CD, à XD: or  $XD > AD$ , puisque AD étant perpendiculaire sur VX, XD est oblique\*, & que l'oblique est

\*N. 31.

\*N. 34.

plus longue\*.

Donc CD fera plus grande que AB.

Voulez-vous que T soit inclinée en sens contraire? Par la même

SUR LA GÉOMÉTRIE. 25  
me raison AB sera plus grande  
que CD.

Donc , puisque  $AB = CD$ , S  
& T sont parallèles.

49. *EUDOXE*. Et si deux lignes *Fig. 21.*  
S, T, sont parallèles, il est évi-  
dent que deux perpendiculaires  
intermédiaires AB, CD, sont  
égales\*.

\*N. 40.

Cela posé, vous allez mesurer *Fig. 22.*  
avec un Equerre ABC la hauteur  
ADE d'une Montagne, & la ligne  
horizontale EFG depuis l'extré-  
mité inférieure E de la hauteur  
perpendiculaire AE jusqu'au pied  
G de la Montagne.

*ARISTE*. 1°. Je mets au point  
A du sommet l'extrémité A d'un  
Equerre font-long, enforte que le  
côté AB soit perpendiculaire à  
AD, & BC à plomb, ou parallèle  
à AD.

2°. Je mesure les côtés AB;  
BC.

3°. Je fais de même au point C.

*Tome II.*

C

4°. J'ajoute ensemble les côtés perpendiculaires & connus BC, HG; ce qui me donne la hauteur perpendiculaire ADE : car  $BC = AD$  entre mêmes parallèles \*N.49.  $AB, CD^*$ ; & par la même raison,  $HG = DE$ .

Enfin, j'ajoute ensemble les côtés AB, CH, parallèles à l'horizon; & j'ai la ligne horizontale EFG, puisque  $AB = EF$ , & \*N.49.  $CH = FG^*$ .

EUDOXE. Et après la ligne droite, je vois la ligne circulaire qui vient s'offrir.

ARISTE. Elle vient à son tour.

### *La ligne Circulaire.*

50. C'est le cercle même regardé comme circonférence; & le cercle considéré de la sorte comprend 360 parties ou degrés; le degré, 60 minutes; la minute, 60 secondes; la seconde, 60 tierces, &c.

Les cercles *concentriques* A, B, Fig. 23  
sont ceux qui ont même centre C.

Les cercles *excentriques* sont Fig. 24  
ceux qui ont des centres G, H,  
différents, comme F, K.

## PROPOSITION I.

51. *Les cercles plus petits ont  
autant de degrés que les cercles plus  
grands.*

Tout cercle est divisé en 360  
degrés \*, donc &c.

\*N. 55.

De-là, 1°. Les degrés des plus  
petits cercles sont plus petits.

2°. Dans deux cercles concen-  
triques, un degré du plus grand  
répond à un degré du plus petit.

3°. Dans les cercles concen-  
triques D, G, chacun des arcs Fig. 25  
BC, EF, compris entre mêmes  
rayons HB, HC, a même rap-  
port à sa circonférence; & les arcs  
BC, EF, de différente grandeur,  
mais qui ont même nombre de  
Cij

28 I. ENTRETIEN  
dégrés, sont arcs semblables.

PROPOSITION II.

52. *Le plus petit de deux cercles concentriques B, G est par tout également éloigné du plus grand.*

Fig. 25. Je dis que  $EB = FC$ .

$EH = FH$ , &  $BE + EH =$

\*N. 18.  $CF + FH$  \*: donc  $BE = CF$  \*\*;

\*\*N. 7. deux grandeurs qui avec grandeurs égales, sont grandeurs égales, étant égales.

Ainsi, deux cercles concentriques ne se coupent point.

PROPOSITION III.

Fig. 26. 53. *Deux cercles T, V, ne se touchent en dedans qu'en un point.*

Je dis que T, V, qui se touchent en A, ne se touchent point en B.

Autrement, DB & DA, qui feroient rayons du même cercle

\*N. 18. V, feroient lignes égales \*: donc

\*N. 9. CDA égaleroit CDB \*: car à



grandeurs égales ajoutez même chose  $CD$  : les tous sont égaux : donc  $CB = CDA$  égaleroit  $CDB$ . Or,  $CB < CDB$  : \* : donc  $T, V$ , \*<sup>N.15.</sup> qui se touchent en  $A$ , ne se touchent point en  $B$ .

## PROPOSITION IV.

54. Deux cercles  $x, z$ , ne se touchent en dehors qu'en un point  $A$ . Fig. 27.

Je dis que  $x, z$ , qui se touchent en  $A$ , ne se touchent point en  $B$ .

Autrement  $CB + BD$  feroit une ligne courbe égale à la droite  $CA + AD$ , formée des mêmes rayons, & entre mêmes points  $C, D$  : \* : ce qui est impossible \*\*. <sup>\*N.18.</sup> <sup>\*\* N.</sup>

EUDOXE. Maintenant je voudrois comparer la ligne droite avec la circulaire. <sup>15.</sup>

ARISTE. Nous le ferons à l'instant.

30 I. ENTRETEN.

*La ligne droite comparée avec la  
ligne circulaire.*

C'est ce qui demande quelques  
définitions suivies de plusieurs pro-  
positions.

*Définitions de la Corde & du  
diamètre.*

**Fig. 28.** 55. La corde AB est une ligne  
droite qui va d'un point à un au-  
tre du cercle, sans passer par le  
centre H. La corde AB soutient  
deux arcs, un plus grand ADB,  
un plus petit AEB. Quand on  
parle simplement d'arc, il s'agit  
du plus petit.

Le diamètre FC est une ligne  
droite qui allant d'un point de la  
circonférence à un autre par le  
centre H, la divise en deux par-  
ties égales.

Ainsi le rayon FH est un demi-  
diamètre.

## PROPOSITION I.

56. Dans le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs égaux *Fig. 281* AEB, GDI, ont des cordes égales.

La courbure de ces arcs égaux étant uniforme & la même\*, *\*N. 18.* leurs extrémités A, B, ou G, I, sont également distantes: donc les cordes AB, & GI qui mesurent ces distances égales, sont égales.

De-là, les arcs plus grands ont des cordes plus grandes.

## PROPOSITION II.

57. Dans le même cercle, les cordes égales soutiennent des arcs égaux.

La courbure de la circonférence est uniforme\*: donc les arcs *\*N. 18.* AEB, GDI, terminés par les extrémités des cordes égales AB, GI, sont égaux. *Fig. 282*

Donc les cordes égales soutien-

nent des arcs égaux.

De-là, des cordes plus grandes soutiennent des arcs plus grands.

### PROPOSITION III.

*Fig. 29.* 58. Une perpendiculaire AC ; coupant la corde DE par le milieu B, coupe l'arc DAE en deux arcs égaux.

Je dis que l'arc AFE = AGD.

Le point A, ainsi que le point B, de la perpendiculaire AC est également éloigné des extrémités

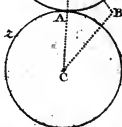
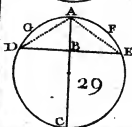
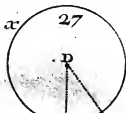
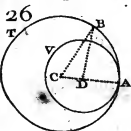
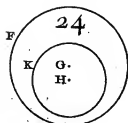
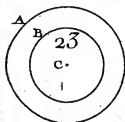
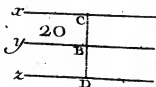
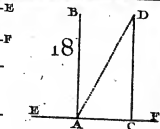
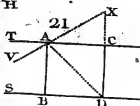
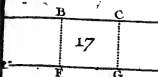
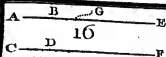
\*N. 23. E, D de la corde ED\* : donc les droites AE, AD, sont cordes égales : donc elles soutiennent des

\*N. 57. arcs égaux\* : donc AFE = AGD.

59. De-là 1°. La perpendiculaire AC coupant l'arc DAE par le milieu A, coupe la corde DE de même : car le point B, ainsi que le point A, est également éloigné

\*N. 23. des points opposés D, E\*.

*Fig. 30.* 2°. Deux arcs DF, EG, en-





tre deux paralleles DE, FG sont égaux.

Car soit la perpendiculaire AC coupant par le milieu les paralleles DE, FG: les cordes AF, AG, ainsi que AD, AE, sont égales\*, & les arcs<sup>\*N.58.</sup> ADF, AEG, aussi-bien que AD, AE, égaux\*: donc en ôtant des<sup>\*N.57.</sup> arcs égaux ADF, AEG les arcs égaux AD, AE, l'on a les restes DF, EG, égaux\*.

\*N.101

#### PROPOSITION IV.

60. *La perpendiculaire AC qui* Fig. 31.  
*coupe la corde ED par le milieu B,*  
*passé par le centre F.*

La perpendiculaire AC coupant la corde ED par le milieu B, passe par tous les points également éloignés des extrémités E, D de la corde\*. Or le centre F<sup>\*N.23.</sup> est également éloigné des points E, D, qui sont dans la circonfé-

\*N.17. rence \* : donc la perpendiculaire AC, &c.

## PROPOSITION V.

Fig. 31. 61. Une ligne ABFC qui passe par le centre F, & coupe la corde ED perpendiculairement, la coupe par le milieu B.

Je dis que  $BD = BE$ .

Comme F, centre, est également éloigné des points E, D \*,  
 \*N.17. B, autre point de la perpendiculaire ABFC, l'est aussi \* : donc  $BD = BE$ .

## PROPOSITION VI.

Fig. 31. 62. Une ligne ABFC qui coupe la corde ED par le milieu B, & passe par le centre F., la coupe perpendiculairement.

ABFC a deux points également éloignés de E, D, sçavoir  
 \*N.17. B, milieu de ED, & F, centre \* : donc ABFC est perpendiculaire  
 \*N.25. sur ED \*.



## PROPOSITION VII.

63. Deux cordes ne se coupent point par le milieu toutes deux. Fig. 32.

Je dis que le point de section F n'est pas le milieu des deux cordes AB, CD.

S'il l'étoit, EF tirée du centre E seroit perpendiculaire sur AB & CD \*, & par conséquent AB \*<sup>N.62.</sup> & CD seroient perpendiculaires sur EF \*: ainsi, du même point \*<sup>N.27.</sup> F d'une ligne EF, l'on élèveroit deux perpendiculaires FD, FB; ce qui ne se peut \*: donc F n'est \*<sup>N.32.</sup> pas le milieu des deux cordes.

## PROPOSITION VIII.

64. Deux cordes AB, CD, également éloignées du centre E, sont égales. Fig. 33.

Par le centre E, je tire les perpendiculaires EH, EI: donc AH est moitié de AB, & CI, de CD \*. \*<sup>N.62.</sup>

# 36 I. ENTRETIEN

Cela posé, je dis que  $AH = CI$  ; & par conséquent  $AB = CD$ .

1°. Les perpendiculaires  $EH$  ;  $EI$  sont égales , mesurant des distances égales par la construction.

*N. 18.* 2°. L'oblique  $AE = CE$  \* ; ce sont rayons du même cercle.

Or les perpendiculaires étant ; égales & les obliques égales , les éloignemens du perpendicule

*N. 37.*  $AH$  ,  $CI$  , sont égaux \*.

Donc  $AH = CI$ .

Par le même principe , si deux cordes sont égales , elles sont également distantes du centre : car les éloignemens  $AH$  ,  $CI$  du perpendicule étant égaux , & les obli-

*N. 64.* ques  $AE$  ,  $CE$  , égales \* , les perpendiculaires  $EH$  ,  $EI$  , ou les

*N. 37.* distances au centre  $E$  sont égales \*.

## PROPOSITION IX.

*Fig. 34.* 65. Les cordes qui sont plus près du centre  $G$  , sont plus grandes.

Je dis que  $AB > CD$ .

L'arc  $AC + CH + HD + DB > CH + HD$ . Donc  $AB$  soutient un plus grand arc que  $CD$  : donc  $AB > CD^*$ . \* N. 56.

### PROPOSITION X.

66. *Le diamètre est la plus longue des lignes droites tirées d'un point à un autre du cercle.*

Je dis que le diamètre  $AB$  est Fig. 35. plus grand que la corde  $CD$ .

$AB = CE + ED$ , deux demi-diamètres \* : or la courbe  $CE + ED > CD$ , droite entre mêmes points \* : donc  $AB > CD$ . \* N. 55.  
\* N. 154

### PROPOSITION XI.

67. *Enfin, si la même corde  $AC$  se trouve corde de deux arcs  $AEC$ ,  $ABC$  de cercles inégaux  $x, z$  ; l'arc du plus grand contient moins de degrés que l'arc du plus petit  $z$ .* Fig. 36.

Je dis que AEC contient moins de degrés que ABC.

Si AEC contenoit autant de degrés que ABC,  $x$  auroit dans son excès de grandeur plus de dé-

\*N.51. grés que  $z$  : or  $x$  n'en a pas plus\*.

## PROBLÈME I.

Fig. 37. 68. EÜDOXE. Vous allez trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés A, B, C.

ARISTE. D'abord je joins ces points par deux lignes droites AB, BC ; puis je tire sur le milieu de ces droites deux perpendiculai-

\*N.28. res\* EF, GH, qui se coupent en D ; & je dis que D est le centre.

1°. Les perpendiculaires EF, GH, sur le milieu des cordes AB,

\*N.60. BC passent par le centre\*.

2°. D est le seul point par où elles passent toutes deux, ne se

\*N.42. coupant pas en deux points\*.

Donc D est le centre.

*EUDOXE.* Mais le cercle qui passe par les points A, B, doit-il passer par C?

*ARISTE.* Oui: DI étant perpendiculaire commune sur BC, & IB, IC, éloignemens du perpendicule égaux, par la construction, les obliques DB, DC sont rayons égaux, ou du même cercle \*. \*N.181

## PROBLÈME II.

69. *EUDOXE.* Un arc de cercle étant donné, achever le cercle.

*ARISTE.* 1°. Je marque trois points dans l'arc, & les joins par deux lignes.

2°. Je mene sur le milieu de chaque ligne une perpendiculaire; & le point où les perpendiculaires se coupent, est le centre \*. \*N.681

Or prenant pour rayon une ligne tirée du centre à l'arc donné, j'acheve le cercle.

De-là, 1°. Deux cercles qui ont trois points communs, les

40 I. ENTRETIEN  
ont tous. 2°. Deux cercles ne se  
coupent qu'en deux points.

### PROBLÈME III.

Fig. 37. 70. *EUDOXE.* Mais s'il faut  
trouver le centre d'un cercle donné  
GBC...

*ARISTE.* Il suffit de tirer par le  
milieu I de la corde BC une per-  
pendiculaire GH. Le milieu D  
de la perpendiculaire sera le cen-  
\* N. 60. tre \*, puisque la perpendiculaire  
qui coupe la corde par le milieu,  
est un diamètre ou double rayon,  
dont le milieu est le centre.

### PROBLÈME IV.

Fig. 37. 71. *EUDOXE.* Enfin, coupons  
un arc BHC par le milieu.

\* N. 70. *ARISTE.* Du centre trouvé D \* ;  
je mene sur la corde BC une per-  
pendiculaire DIH, qui coupe  
l'arc BHC en deux parties éga-  
\* N. 58. les \*.

De là, les Sécantes.

Les

*Les Sécantes.*

72. Ce sont des lignes qui coupent le cercle : il y a Sécantes extérieures & Sécantes intérieures. Celles-là vont d'un point extérieur couper le cercle ; celles-ci, d'un point intérieur.

## PROPOSITION I.

73. Si d'un point A hors du cercle ; *Fig. 38.*  
on mene sur la partie convexe plusieurs lignes ; la ligne AB qui prolongée passeroit par le centre D , est plus courte que toute autre.

Soit le rayon  $BD = CD$  \* *\*N. 18.*

Je dis que  $AB < AC$ .

$AB + BD < AC + CD$  \* *\*N. 15.*

Donc  $AB < AC$  \* ; car si l'on *\*N. 11.*  
joint à grandeurs égales des grandeurs inégales , celle qui donne la plus petite est la plus petite.

## PROPOSITION II.

*Fig. 39.* 74. Si d'un point A hors du cercle, on y mene plusieurs lignes qui le traversent jusqu'à la partie concave; la ligne AC qui passe par le centre B, est la plus longue.

Je dis que  $AC > AD$ .

$AC = AB + BD$  rayon égal à  
 \*N. 18.  $BC$  \*. Or  $ABD > AD$  \*\*.

\*\* N.

25.

## PROPOSITION III.

*Fig. 40.* 75. La plus longue des Sécantes intérieures ABC, AD est celle qui passe par le centre B.

Je dis que  $ABC > AD$ .

$ABC = ABD$ , puisque  $BC$   
 \*N. 18.  $= BD$  \*, rayon du même cercle :  
 \*N. 15. or  $ABD > AD$  \* : donc  $ABC >$   
 $AD$ .

## PROPOSITION IV.

*Fig. 41.* 76. Si de deux points A, D, de la circonférence, on tire deux lignes AB, DB, qui se coupent en dedans;



la ligne AB qui prolongée passeroit par le centre C, est la plus courte.

Je dis que  $AB < DB$ .

Le rayon  $AB + BC = DC$ ,  
rayon  $< DB + BC$  \* : donc  $AB$  \* *N. 15.*  
 $+ BC < DB + BC$  : donc  $AB$   
 $< DB$  \* : car la grandeur qui \* *N. 11.*  
jointe à la même, donne une  
quantité plus petite, est plus petite.

PROPOSITION V.

77. D'un point B hors du centre *Fig. 42.*  
A, on mene à la circonférence deux  
lignes égales.

Soit ABEF, rayon perpendi-  
culaire sur la corde GH :

Je dis que  $BG = BH$ .

La perpendiculaire commune  
BE passant par le centre A, cou-  
pe la corde GH par le milieu \* : \* *N. 67.*  
donc les éloignemens du perpen-  
dicule EG, EH, sont égaux, &  
la perpendiculaire BE est la mê-  
me ; & par conséquent l'oblique  
 $BG = BH$  \*.

\* *N. 26.*

Dij

## PROPOSITION VI.

*Fig. 43.* 78. Enfin, si une ligne droite CE-FD, traverse deux cercles concentriques, ses parties comprises entre les cercles sont égales.

Je dis que  $CE = FD$ .

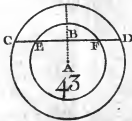
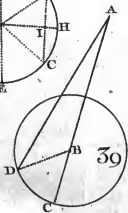
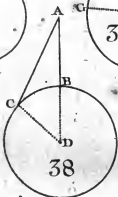
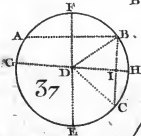
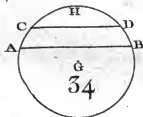
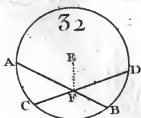
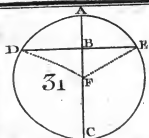
Du centre A, sur la corde CD, ou EF, j'éleve la perpendiculaire AB: donc  $BC = BD$ , &  $BE =$   
*\*N. 61.*  $BF$  \*, puisque la perpendiculaire tirée du centre coupe la corde par le milieu.

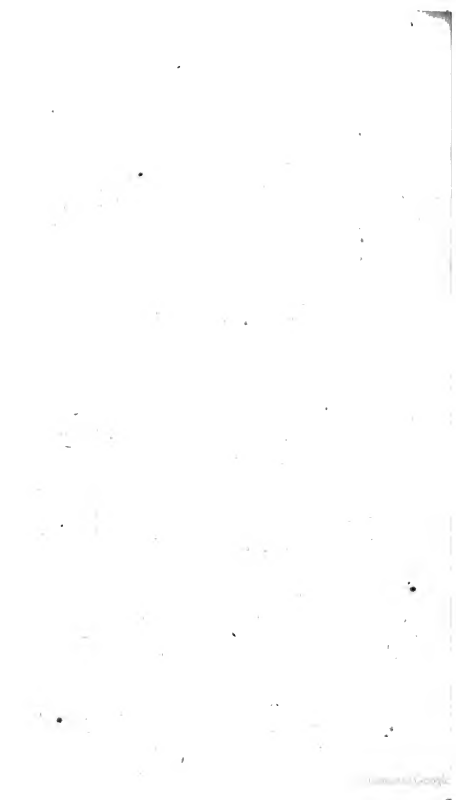
Donc, si de BC on ôte BE, & que de BD on ôte BF; reste  
*\*N. 10.*  $CE = FD$  \*: car de grandeurs égales, ôtez choses égales; les restes sont égaux.

Et la *Tangente* vient à la suite des Sécantes.

*La Tangente.*

*Fig. 44.* 79. C'est une perpendiculaire AC sur l'extrémité d'un rayon DC.





De-là, 1°. Le rayon touché est perpendiculaire sur la Tangente\*. \* N. 27.

2°. Si une perpendiculaire coupe la Tangente au point d'attouchement, elle passera par le centre, étant même chose que le rayon: autrement, il partiroit du point d'attouchement deux perpendiculaires, le rayon & la perpendiculaire qu'on suppose couper la Tangente; ce qui n'est pas possible\*. \* N. 31.

# PROPOSITION I.

80. *La Tangente ABC ne tou-* Fig. 44.  
*che le cercle que par un point C.*

Je dis que si C touche, B ne touche pas.

Le rayon DC étant perpendiculaire sur ABC\*, DB est oblique\*. \* N. 79.  
que\*: donc  $DB > DC$ \*\*. \* N. 31.

Donc si C touche, B, extré- \*\* N.  
mité de l'oblique DB plus grande 34.  
que DC, ne touche pas.

## PROPOSITION II.

*Fig. 45.* 81. Point de ligne droite qui passe entre la Tangente & le cercle.

Je dis que CE tirée du point d'attouchement C entre la Tangente BC & le rayon CD, passe dans le cercle.

1°. Puisque BC est perpendiculaire sur CD, CE est oblique à *\*N.79.* CD, & CD oblique à CE\*: ainsi l'on peut tirer du centre D une perpendiculaire DF sur CE.

2°. La perpendiculaire DF est *\*N.34.* plus courte que l'oblique CD\* qui est rayon: donc F est dans le cercle.

Or F est un point de la ligne CE: donc CE passe dans le cercle.

## PROPOSITION III.

*Fig. 46.* 82. Entre la Tangente AB & le cercle C, on peut tirer par le point d'attouchement A une infinité de lignes circulaires.

1°. Prolongez le rayon AD en E: & de E, comme centre, décrivez par A le cercle AFA  $\supset$  C, ayant le rayon plus grand.

2°. Le rayon AD + DE pouvant être prolongé à l'infini, vous ferez passer par A des cercles à l'infini, toujours plus grands, & qui n'auront qu'un point A de commun\*.

\*N. 53.

Or ces cercles ne toucheront la tangente AD qu'en un point\*.

\*N. 22.

Donc entre la Tangente & le cercle, &c.

## PROBLÈME I.

83. EUDOXE. Tirer une Tangente sur un point donné A. Fig. 47.

ARISTE. Je mene d'abord un rayon du centre C au point donné A; puis une perpendiculaire AB sur l'extrémité A du rayon\*; & AB est la Tangente\*.

\*N. 28.

\*N. 79.

## PROBLÈME II.

*Fig. 48.* 84. EUDOXE. D'un point D hors du cercle, tirer une Tangente.

ARISTE. 1°. Du centre E je tire une ligne droite ED au point donné D.

2°. Je mene une Tangente FAG par le point A, où la droite ED coupe le cercle ABC.

3°. Je décris un cercle concentrique par le point donné D.

4°. De ce point D, je tire une corde  $DH = FG$  : & je dis que DH est la Tangente qu'il falloit tirer.

Les deux cordes FG & DH étant égales par la construction, sont également éloignées du centre dans tous leurs points\* :

Donc elles ont même rapport au cercle concentrique intérieur \*N. 52. ABC\*.

Or FG est Tangente : donc DH l'est.



85. *EUDOXE*. Du même point *Fig. 49.*  
*A*, je tire deux Tangentes *AB*,  
*AC*: sont-elles égales?

*ARISTE*. Sans doute: 1°. Même oblique *AD*.

2°. Eloignemens du perpendi-  
 cule égaux *DB*, *DC*, rayons du  
 même cercle\*. \*N. 18.

Donc les Tangentes *AB*, *AC*,  
 qui sont les perpendiculaires\*, \*N. 79.  
 sont égales\*. \*N. 36.

Et après la Tangente vient le  
 Sinus d'un arc.

### *Le Sinus.*

86. C'est une perpendiculaire *Fig. 50.*  
 tirée de l'extrémité d'un arc ou  
 d'un rayon sur un rayon qui ter-  
 mine l'autre extrémité de l'arc;  
*AB* est Sinus de l'arc *AC*. De-là.

### I.

87. Le Sinus d'un arc étant pro- *Fig. 50.*  
 longé jusqu'à la circonférence, de-  
 vient corde d'un arc double.

50 I. ENTRETEN

Soit le Sinus AB prolongé en D : je dis que l'arc ACD soutenu par la corde ABD est double de l'arc AC dont AB est Sinus, ou que  $AC = CD$ .

Le rayon EC, qui part du centre E, coupant perpendiculairement la corde ABD perpendiculaire sur EC \*, coupe l'arc ACD par le milieu \* : donc  $AC = CD$ .

Ainsi le Sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutient un arc double.

II.

Fig. 50. 88. Dans le même cercle, deux Sinus égaux donnent des arcs égaux.

Soit le Sinus  $AB = BD$  ; je dis que  $AC = CD$ .

Le rayon EC est une perpendiculaire, qui partant du centre, coupe la corde  $AB + BD$  par le milieu \*, & par conséquent l'arc  $AC + CD$  \* : donc  $AC = CD$ .

III.

89. Dans le même cercle , les arcs égaux donnent des Sinus égaux. Fig. 50.

Soit l'arc  $AC = CD$  : je dis que le Sinus  $AB = BD$ .

Puisque  $AB$  est perpendiculaire sur  $EC^*$ ,  $EC$  l'est sur  $AB + BD^{**}$ . \*N. 86.  
\*\*N.  
 Or une perpendiculaire qui coupe l'arc  $AC + CD$  par le milieu ,  
 coupe de même la corde  $AB + BD^*$ , donc  $AB = BD$ . 27.

Enfin les Lignes nous ont conduits aux Angles. \*N. 58.

*EUDOXE.* Et le plaisir de voir des vérités qui s'élevent comme par degrés les unes sur les autres me rappellera bientôt dans votre Cabinet.



## II. ENTRETEN.

*Sur les Angles.*

*EUDOXE.* JE m'en souviens ; Ariste ; il est question d'Angles ; & ces figures qui parlent d'une manière si efficace aux yeux & à l'imagination , réveilleront nos idées , & soutiendront l'attention de l'esprit.

*ARISTE.* Commençons par quelques définitions.

*Fig. 51.* 90. La surface est une étendue considérée précisément comme longue & large.

La surface plane ou le plan CD est une surface dont toutes les parties sont tellement situées , qu'une ligne droite qui tourneroit dessus immédiatement , en toucheroit tous les points également sans obstacle.

Ainsi le plan est composé de lignes droites & parallèles, qui ne s'écartent en aucun sens.

C'est le contraire dans la surface courbée AB. *Fig. 52.*

91. Un plan borné par une ligne circulaire est un cercle entier EFGHI. *Fig. 53.*

Le demi-cercle EFGI est la partie du cercle terminée par la moitié EFG de la circonférence, & par le diamètre EIG.

Le quart de cercle EIF est la quatrième partie du cercle, & par conséquent il a pour mesure de sa grandeur un arc de 90 degrés\*.

92. L'angle plan ABC dont il s'agit, est une surface comprise entre deux lignes écartées d'une part, & réunies de l'autre en un point B, qui est le sommet de l'angle. *\*N. 50. Fig. 54.*

L'angle mixte est formé par une ligne droite & une ligne courbe.

54 II. ENTRETEN

Les deux côtés AB, CB de l'angle rectiligne, dont il est question, sont des lignes droites.

L'angle se désigne par trois lettres A, B, C, dont la seconde soit au sommet, ou par une seule B qui soit au sommet.

Si les côtés d'un angle sont prolongés après la section, il se forme des angles ABC, DBE, opposés au sommet B.

Fig. 55. 93. La mesure d'un angle est l'arc qui a pour centre le sommet de cet angle, & pour rayons les côtés du même angle.

Qu'un rayon AB fasse un tour sur un centre B: tandis que l'extrémité A décrit la circonférence ACIE; un point quelconque F du rayon BA décrit une ligne circulaire concentrique FGH. De là, tandis que l'extrémité A décrit un arc AC d'une quantité déterminée, qui soit, par exemple, la quatrième partie de la circon-

férence, le point F décrit un arc FG semblable, ou qui est la 4<sup>e</sup>. partie d'une ligne circulaire concentrique FGH : donc la surface, l'ouverture, ou la grandeur de l'angle ABC, formée d'arcs semblables à l'arc correspondant AC de la circonférence répond à cet arc : & par conséquent la mesure d'un angle est l'arc qui a pour centre le sommet, & pour rayon, les côtés de l'angle.

Ainsi, les angles qui contiennent des arcs égaux, ou semblables, sont égaux.

L'angle droit ABC a pour mesure un arc de 90 degrés, & c'est un quart de cercle\*.

\*N. 91.

L'angle est-il plus petit qu'un angle droit? c'est un angle aigu CBD. Plus grand qu'un angle droit? c'est un angle obtus ABD.

Si une oblique coupe deux pa- Fig. 56.  
ralleles, il se forme des angles  
aigus & des angles obtus en de-

56 II. ENTRETIEN  
 dans & en dehors ; les uns *internes* ; les autres *externes*. Les aigus internes F, G, ou externes K, L, comparés ensemble, sont *alternes* ; les obtus H, I, ou M, N, de même. F, N, ou G, M sont *internes de même côté*.

Il y a des angles qui ont leur sommet au centre , d'autres qui ne l'ont pas.

EUDOXE. Hé bien , comparons-les successivement , mesurons les uns & les autres , voyons-en les différentes propriétés.

ARISTE. Nous le ferons dans quelques propositions , dont les précédentes répandront la lumière sur les suivantes.

*Des Angles qui ont leur sommet au centre.*

### PROPOSITION I.

Fig. 57. 94. Deux Angles droits ABC.,



*ABD, valent, pris ensemble, un demi-cercle.*

Chacun vaut un quart de cercle, ayant pour mesure un arc de 90 degrés \*. Donc les deux, pris <sup>\*N. 93.</sup> ensemble, ayant pour mesure la demi-circonférence CAD, valent un demi-cercle.

De-là, 1°. Toutes les lignes CB, FB, EB, GB, &c. qui tomberont d'une part sur le milieu B du diamètre, formeront des angles, qui tous ensemble, vaudront deux droits, ayant pour mesure la demi-circonférence.

2°. Quatre angles droits ABC, ABD, CBE, DBE, valent le cercle.

## PROPOSITION II.

95. *Une perpendiculaire sur une Fig. 58.  
ligne fait avec elle deux angles droits.*

Soit AB perpendiculaire sur CD : je dis que les angles ABC, ABD, sont droits.

## 58 II. ENTRETIEN

De B, je décris le demi-cercle  
CEAFD, dont le diamètre est

\*N.55.  $CB + BD$  \*.

La corde  $AC = AD$ , puisque  
le point B de la perpendiculaire  
AB étant également éloigné des  
points opposés C, D, par la con-

\*N.23. struction, le point A l'est aussi \* :

\*N.57. donc l'arc  $AEC = AFD$  \*, puis-  
que les cordes égales soutiennent  
des arcs égaux : ainsi, chacun est  
de 90 degrés, moitié de la demi-  
circonférence CAD ; & les an-  
gles ABC, ABD, ayant pour me-  
sure un arc de 90 degrés, cha-

\*N.94. cun ; sont droits \*.

De-là, un angle de 90 degrés,  
ou formé par deux perpendicu-  
laires, c'est même chose, c'est-  
à-dire, un angle droit.

## PROPOSITION III.

Fig. 58. 96. Une ligne AB, qui fait avec  
une autre CD deux angles droits,  
est perpendiculaire.

Puisque les cordes AC, AD soutenant des arcs égaux dans l'hypothèse, sont égales\*, le point\* N.57. A est également éloigné des points C, D; le point B l'est aussi\*, puis- \* N.18. que BC & BD sont rayons du même cercle: donc AB qui a deux points également distans, chacun, de C, D, est perpendiculaire \*. \* N.25..

## PROPOSITION IV.

97. *Les deux angles ABC, Fig. 59. CBD, faits par une oblique CB sur une ligne droite, valent deux droits.*

Pris ensemble, ils ont pour mesure la demi-circonférence ACD décrite du centre B, mesure de deux droits\*: donc ils valent\* N.94. deux droits.

## PROPOSITION V.

98. *Deux Angles opposés au sommet sont égaux. Fig. 59.*

1°. Les aigus ABE, CBD, sont égaux\*: car joints séparé- \* N.8.

60 II. ENTRETEN.

ment avec le même obtus ABC ;

\*N.97. ils valent deux droits \*.

2°. Les obtus ABC , DBE sont égaux par la même raison.

\*N.93. 3°. Tous les droits sont égaux \*.

Donc les angles opposés au sommet sont égaux.

Sinus des angles , ou des arcs ,  
\*N.93. mesures des angles \* , c'est même chose.

Cela posé ,

PROPOSITION VI.

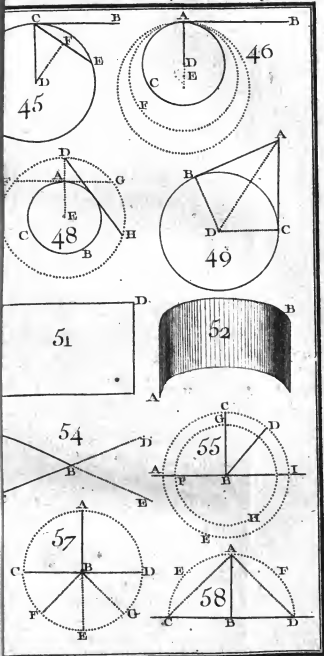
99. *Deux angles de même espèce qui ont les Sinus égaux , sont égaux.*

Ces angles ont pour mesure  
\*N.88. des arcs égaux \* , puisque les Sinus égaux donnent des arcs égaux : donc ils sont égaux.

PROPOSITION. VII.

100. *Les angles égaux ont des sinus égaux.*

Ces angles ont pour mesure





SUR LA GÉOMÉTRIE. 61  
des arcs égaux : or les arcs égaux  
donnent des sinus égaux \*. \*N.56.

### PROPOSITION VIII.

101. Une oblique BC entre deux Fig. 60.  
parallèles AB, CD, fait les angles  
alternes égaux.

Je dis d'abord que les alternes  
aigus ABC, BCD \* sont égaux. \*N.93.

1°. De B, décrivez l'arc CE ;  
& de C, l'arc BF : ce sont deux  
arcs de cercles égaux, puisqu'ils  
ont même rayon,  $BC = CB$ .

2°. Tirez les perpendiculaires  
CA, BD : elles sont sinus des an-  
gles \* ABC, BCD, & ces sinus \*N.86.  
sont égaux étant perpendiculaires & 98.  
entre mêmes parallèles \*. \*N.40.

Ainsi les angles ABC, BCD,  
ont des sinus égaux, & par con-  
séquent des arcs égaux \*. \*N.88.

Donc ayant mesures égales ; ils  
sont égaux.

Je dis en second lieu que les

Fig. 61. alternes obtus BCG, CBH sont égaux.

L'obtus BCG avec l'aigu BCD

\*N 97. vaut deux droits\*.

L'obtus CBH avec l'aigu ABC

\* N. = BCD \*, vaut aussi deux droits.

101. Donc les obtus BCG, CBH

\* N. 8. sont égaux \*, puisque deux grandeurs, qui jointes séparément avec grandeurs égales, sont grandeurs égales, sont égales. .

### PROPOSITION IX.

Fig. 60. 102. Deux lignes AB, CD ; sont parallèles lorsqu'une ligne BC qui les coupe, fait les angles alternes égaux.

1°. Les angles alternes ABC ; BCD, étant égaux, les arcs CE, BF, qui en sont la mesure, & par conséquent les Sinus CA, BD, \*N. 89. sont égaux\*.

2°. Ces deux Sinus égaux sont \*N. 86. deux perpendiculaires égales\*,



qui joignant les deux lignes AB, CD, sont mesures égales de leurs distances.

Donc AB & CD sont parallèles \*.

\*N.40.

## PROPOSITION X.

103. Enfin, si une oblique EF coupe deux parallèles, les angles internes B, D, de même côté valent deux droits. Fig. 62.

Les angles B & A valent deux droits \*: or l'angle  $D = A$  alterne \*.  
ne \*.

\* N.

Donc B & D valent deux droits. 101.

104. De-là, 1°. Les angles aigus E, D, de même côté sont égaux : car l'angle alterne  $D = A$  \*, &  $A = E$  opposé au sommet \*.  
\* N.  
101.  
\* N.97.

2°. Les angles obtus de même côté B, F, sont égaux de même, puisque  $F + D$ , ainsi que  $B + E = D$ , vaut deux droits \*. \* N.97.

## 64 II. ENTRETIEN

**Fig. 63.** 105. 3°. Si deux angles intérieurs  $ABC$ ,  $BCD$ , de même côté valent moins que deux droits, les lignes  $AE$ ,  $DF$ , coupées par l'oblique  $BC$ , ne sont point parallèles, & par conséquent elles se rencontreront.

106. *EUDOXE*. Mais comment partagez-vous un angle en deux également ?

**Fig. 64.** *ARISTE*. 1°. Du sommet  $B$ , je décris un arc  $AEC$ .

2°. Je mene la corde  $AC$ .

3°. Du centre  $B$ , je tire une perpendiculaire  $BDE$  sur la corde

**\*N. 28.**  $AC^*$ .

Et je dis que l'angle  $ABE = EBC$ .

La perpendiculaire  $BDE$  partant du centre  $B$ , coupe par le **\*N. 61.** milieu  $D$  la corde  $AC^*$ , & par **\*N. 58.** conséquent l'arc  $AEC^*$  : donc l'arc  $AE = EC$  : donc l'angle  $ABE = EBC$ , ayant même arc pour mesure.

107. *EUDOXE*. Et s'il faut di- *Fig. 64.*  
viser un quart de cercle AEC, ou  
un arc de 90 degrés, en deux par-  
ties égales.....

*ARISTE*. 1°. Du centre B, je  
fais un angle ABC dont les côtés  
comprennent l'arc AEC.

2°. Je partage cet angle en  
deux également \*; & l'arc AEC <sup>\* N.</sup>  
est coupé par le milieu. *106.*

108. *EUDOXE*. Ou d'un point *Fig. 65.*  
donné A dans une ligne droite  
AB, faire un angle égal à un an-  
gle donné CDE....

*ARISTE*. 1°. Du sommet D de  
l'angle donné, je décris un arc  
CE compris entre ses côtés. Puis,  
avec même ouverture de com-  
pas, du point donné A, je décris  
un arc BFG.

2°. Tirant cordes égales CE;  
BF, j'ai arcs égaux CE, BF\*. <sup>\* N. 17.</sup>

Enfin, je mene de F en A la  
droite FA; & l'angle BAF =  
CDE\*, puisqu'ils ont pour me- <sup>\* N. 931.</sup>

66 II. ENTRETEN

fure arcs égaux , par la construction.

Fig. 66. 109. *EUDOXE.* Enfin , d'un point donné F hors d'une ligne BC , tirons une ligne qui fasse avec elle un angle donné D.

*ARISTE.* 1°. J'éleve sur la donnée BC une ligne BE faisant avec elle un angle CBE égal à l'angle

\* N. donné D \*.

298. 2°. Du point donné F , je tire une ligne FA parallele à la ligne

\* N. 42. élevée BE \*. Et l'angle FAC formé par la parallele & la ligne donnée est l'angle qu'il falloit faire : car l'angle  $FAC = EBC = D$  ; puisque deux paralleles coupées par une oblique , font les angles aigus du même côté égaux \*.

\* N. 704. *EUDOXE.* Après cela , je vous livre à vous même.

*ARISTE.* Nous passerons donc à d'autres angles , employant encore & Définitions , & Propositions , & si vous le voulez , Problèmes.

*Les Angles qui n'ont pas leur sommet au centre.*

Ce sont des angles qui ont leur sommet à la circonférence, entre la circonférence & le centre, ou hors de la circonférence.

### DÉFINITIONS.

*110. Angle au centre ABC* est un angle dont le sommet B est au centre. Fig. 67.

*Angle inscrit ADC* ou à la circonférence, est celui dont le sommet D se trouve à la circonférence, & les côtés AD, CD dans le cercle.

*Angle circonscrit EFG* est un angle hors du cercle, mais dont les côtés touchent le cercle. Fig. 68.

*111. Petit Segment P*, c'est la plus petite portion du cercle comprise entre la corde & la circonférence; *grand Segment G*, la plus grande.

*Angle du petit Segment ABC,* est un angle formé par la Tangente AB & la corde BC, & qui comprend le petit Segment P.

*L'Angle du grand Segment CBD* est fait par la Tangente BD & la corde BC, & comprend le grand Segment G.

BEC est angle dans le petit Segment ; BFC, dans le grand.

## PROPOSITION I.

112. *L'Angle du petit Segment a pour mesure la moitié de l'arc soutenu par la corde.*

Fig. 69.

Soient la corde BC. parallèle au diamètre EF, & le diamètre perpendiculaire GH, qui passant par le centre I, & coupant perpendiculairement le diamètre EF aussi-bien que la corde BC parallèle \*, coupe le diamètre EF, la corde BC & par conséquent l'arc

\*N. 46. lele \*,

\*N. 61. BGC par le milieu\*.

Fig. 58.

Je tire le rayon IB perpendiculaire sur la Tangente AB<sup>\*</sup>; & je<sup>\*N.79.</sup> dis que l'angle ABC a pour mesure l'arc BG, moitié de BGC.

1°. L'Angle ABI est droit<sup>\*</sup>,<sup>\*N.93.</sup> étant formé par la Tangente AB & le rayon perpendiculaire.

L'Angle EIG est droit aussi, puisqu'il est fait de même par deux perpendiculaires IG, IE. Voilà deux angles égaux.

2°. L'Angle CBI dans le premier, & l'angle BIE dans le second sont égaux<sup>\*</sup>, étant alternes.<sup>\*N.</sup> Otez des deux droits, égaux, les<sup>101.</sup> deux alternes égaux : les restes ABC, BIG sont égaux<sup>\*</sup>.<sup>\*N.10.</sup>

Or l'angle au centre BIG a pour mesure l'arc BG<sup>\*</sup>.<sup>\*N.93.</sup>

Donc l'angle ABC l'a de même.

## PROPOSITION II.

113. *L'Angle du grand Segment*

*a pour mesure la moitié de l'arc du grand Segment.*

Fig. 69. Je dis que l'Angle CBD a pour mesure l'arc BH, moitié de l'arc BHC.

L'Angle  $CBD = CBI + IBD$ :

\* N. or  $CBI = BIE$  alterne \*, &  $IBD$   
 201.  $= EIH$  droit aussi : donc  $CBD$   
 $= BIE + EIH$ .

Mais  $BIE + EIH$  a pour mesure l'arc BH \*:  
 \* N. 93.

Donc l'Angle CBD a pour mesure l'arc BH.

### PROPOSITION III.

Fig. 70. 114. L'Angle à la circonférence ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC sur lequel il est appuyé.

Les trois Angles ABD, CBE, ABC, pris ensemble, ont pour mesure la valeur de la demi-circonférence \*.

\* N. 94. Or ABD a pour mesure la moitié de l'arc AB; & CBE, la moi-



SUR LA GÉOMÉTRIE. 71  
tié de l'arc BC \* : donc ABC \* N.  
a pour mesure la moitié de l'arc 118.  
AC, ces trois moitiés faisant la  
demi-circonférence.

115. De-là, 1°. Tous les An-  
gles inscrits, ou à la circonféren-  
ce, appuyés sur le même arc sont  
égaux, ayant même mesure.

2°. L'Angle à la circonférence Fig. 71.  
ABC appuyé sur le diamètre est  
droit, puisqu'il a pour mesure la  
moitié de la demi-circonférence,  
ou la valeur de 90 degrés.

EUDOXE. Et cela peut donner, Fig. 72.  
ce semble, une manière d'élever  
une perpendiculaire sur l'extré-  
mité B d'une ligne AB.

ARISTE. Oui : car d'un centre  
C pris à volonté, intervalle CB,  
décrivez un cercle qui coupe la  
ligne AB, passant par l'extrémité  
B.

Ensuite tirez un diamètre DCE  
par le point D, où le cercle cou-  
pe la ligne donnée AB.

72 II. ENTRETIEN

Elevez enfin , sur l'extrémité B la ligne BE , & BE sera la perpendiculaire \* , puisque l'angle DBE sera droit , étant appuyé sur le diamètre DCE.

PROPOSITION IV.

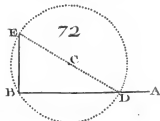
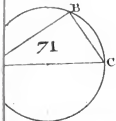
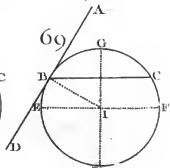
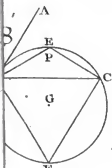
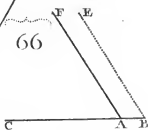
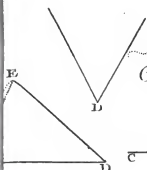
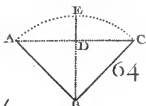
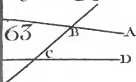
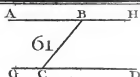
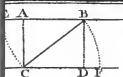
116. *L'Angle au centre est double de l'Angle à la circonférence appuyé sur le même arc.*

L'Angle au centre a pour mesure l'arc sur lequel il est appuyé \* ; l'Angle à la circonférence , la moitié de cet arc \* : donc l'Angle , &c.

PROPOSITION V.

Fig. 73. 117. *Un Angle ABC , dont le sommet B se trouve entre la circonférence & le centre G , a pour mesure la moitié de l'arc AC , sur lequel il est appuyé d'une part , & la moitié de l'arc DE compris entre ses côtés prolongés de l'autre.*

Soient





Soient BD, BE, prolongemens; & EF parallèle à BC.

Je dis que l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE.

L'angle AEF a pour mesure la moitié de l'arc AF\*, & par conséquent la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc CF ou de l'arc DE = CF entre mêmes parallèles\*.

Or l'angle  $ABC = AEF$ \*, puisque les angles aigus de même côté d'une oblique coupant deux parallèles, sont égaux.

Donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE.

# PROPOSITION VI.

118. Un angle ABC, dont le sommet B est hors du cercle, mais dont les côtés le traversent, a pour mesure la moitié de l'arc concave AC, moins la moitié de l'arc convexe DE.

74 II. ENTRETIEN

Soit DF parallèle à BC.

Je dis que l'angle ABC a pour mesure la moitié de AC, moins la moitié de DE.

L'angle ADF a pour mesure  
 \* N. la moitié de AF \*, ou la moitié  
 114. de AC, moins la moitié de FC  
 \* N. 30. = DE \* ; donc ADF a pour mesure la moitié de AC, moins la moitié de DE.

Or l'angle  $ABC = ADF$ , autre aigu de même côté \*.  
 104.

Donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de AC, moins la moitié de DE.

PROPOSITION VII.

Fig. 75. 119. Enfin, l'angle circonscrit ABC, ou formé par deux Tangentes, a pour mesure la moitié de l'arc concave ADC, moins la moitié de l'arc convexe AEC.

Tirez CD parallèle à BA.

Je dis que l'angle ABC a pour

mesure la moitié de l'arc ADC, moins la moitié de AEC.

L'angle DCF ayant pour mesure la moitié de l'arc CD\*, a <sup>\* N.</sup> <sup>112.</sup> pour mesure la moitié de ADC, moins la moitié de AD, ou de AEC = AD\*. Or l'angle ABC <sup>\* N. 30.</sup> = DCF\*: donc l'angle ABC a <sup>\* N.</sup> <sup>104.</sup> pour mesure la moitié de l'arc ADC, moins la moitié de AEC.

Ainsi les angles nous conduisent naturellement aux Triangles.

EUDOXE. Et j'en verrai les propriétés avec le même plaisir, le plutôt qu'il me sera possible.

### III. ENTRETIEN.

*Sur les Triangles.*

ARISTE. **V**ous le sçavez, Eudoxe, nous nous sommes engagés à parler des Triangles.

### 76 III. ENTRETIEN

*EUDOXE.* Sans doute ; & en montant toujours par degrés , vous allez nous éclairer de plus en plus.

*ARISTE.* Laissons - là les paroles superflues ; la Géométrie les proscriit , leur préférant la précision & la simplicité de ses Définitions , de ses Propositions , de ses Problèmes.

#### DEFINITIONS.

120. On appelle figure un espace renfermé de tous côtés.

Le Triangle est une figure de trois côtés , ou de trois angles.

Six sortes de Triangles , eu égard aux côtés & aux angles.

*Fig. 76.* Le Triangle Scalene B a ses trois côtés inégaux.

*Fig. 77.* L'Isocèle C a deux côtés égaux.

*Fig. 78.* L'Equilateral D a ses trois côtés égaux.

*Fig. 79.* Le Triangle rectangle E a un angle droit.



L'Obtusangle F a un angle *Fig. 80.*  
obtus.

L'Acutangle G a trois angles *Fig. 81.*  
aigus.

La base d'un Triangle est le côté opposé à l'angle formé par les deux autres côtés.

Dans le Triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme spécialement l'Hypoténuse, souvent la Base.

La hauteur d'un Triangle est une perpendiculaire tirée d'un angle sur le côté opposé, considéré comme base.

Si les trois angles d'un Triangle ont leur sommet, chacun, dans la circonférence d'un cercle, le Triangle est *inscrit*, & le cercle *circonscrit*.

L'angle extérieur ABC est un *Fig. 82.*  
angle formé par le prolongement BC d'un des côtés du Triangle ABD.

121. Cela supposé, commen-  
G iij

### 78 III. ENTRETEN

*Fig. 83.* çons par circonscrire un cercle au Triangle ABC.

1°. Ayant pris les sommets A , B , C , pour trois points donnés joints par les deux lignes AB, BC, je tire sur le milieu des deux lignes deux perpendiculaires EF , GH

\*N.42. qui se coupent dans un point D \*.

2°. Du point de section D , comme centre , je décris par les

\*N.68. sommets A , B , C , un cercle \* ;

\* N. & c'est le cercle circonscrit \*.

120.

#### PROPOSITION I.

*Fig. 84.* 122. Les trois angles d'un Triangle , pris ensemble , sont égaux à deux droits.

Les trois angles A , B , C , du Triangle inscrit , ont pour mesure la moitié des trois arcs AB , BC , CA , sur lesquels ils sont ap-

\* N. puyés \* , & par conséquent la valeur de la demi - circonférence :

\*N.94. donc \* , pris ensemble , ils sont égaux à deux droits.

Ainsi la valeur des trois angles

d'un Triangle est de 180 degrés. valeur de 2 droits.

De-là, 1°. Le Triangle n'a qu'un angle obtus ou droit ; puisque s'il en avoit deux , il vaudroit plus de 180 degrés , par conséquent il a deux angles aigus ; & si deux côtés sont perpendiculaires l'un sur l'autre , le 3<sup>e</sup>. est incliné sur les deux, faisant avec eux deux angles aigus.

2°. Le Triangle peut avoir trois angles aigus : car trois angles aigus de 60 degrés chacun , valent deux droits précisément, ou 180 degrés.

3°. Dès que l'on connoît deux angles d'un Triangle , on connoît le troisième.

De 180 degrés , valeur des trois angles du Triangle , ôtez la somme des deux angles connus : le reste est la valeur du troisième.

#### PROPOSITION II.

123 Dans un Triangle , deux Fig. 85.

G iij

### 80 III. ENTRETIEN

*côtés, pris ensemble, sont plus grands que le troisième.*

Je dis que  $AB + BC > AC$ .

$AB + BC$  est ligne courbe ; &  $AC$  ligne droite entre mêmes points  $A, C$  : donc  $AB + BC$   
 \*N.15.  $> AC$  \*.

### PROPOSITION III.

Fig. 86. 124. *Dans un Triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle ; & le plus grand angle, au plus grand côté.*

1°. Le plus grand côté  $AC$  soutient le plus grand arc  $ADC$ \*, me-  
 \*N.57. sure du plus grand angle  $ABC$  \* ;  
 \*N.93. donc le plus grand côté  $AC$  est opposé au plus grand angle  $ABC$ .

2°. Le plus grand angle  $ABC$  a pour mesure le plus grand arc  $ADC$  soutenu par le plus grand  
 \*N.56. côté  $AC$  \* : donc le plus grand angle  $ABC$  est opposé au plus grand côté  $AC$ .

125. De-là, 1°. Les angles op-

# SUR LA GÉOMÉTRIE. 81

posés à côtés égaux sont égaux ,  
& les côtés opposés à angles  
égaux , sont égaux.

2°. Si un angle compris entre *Fig. 87.*  
deux côtés déterminés croît , l'arc  
& le côté opposé croîtront ; &  
par conséquent , si l'angle droit  
BFC , par exemple , devient l'ob-  
tus BFD , le second côté oppo-  
sé BD sera plus grand que le pre-  
mier BC.

3°. Si d'un point B dans le cer-  
cle , mais hors du centre F , on  
tire plusieurs lignes BC , BD , à  
la circonférence , la ligne la plus  
proche de la perpendiculaire  
BFE qui passe par le centre , ou  
qui est la plus longue \* , est plus *\*N. 75.*  
longue que la plus éloignée , puis-  
que  $BD > BC$ .

4°. D'un point B hors du cen-  
tre F , on tire bien deux lignes  
égales \* : aussi F centre , & point *\*N. 77.*  
de la perpendiculaire FB , étant  
également éloigné des points C ,

### 82 III. ENTRETIEN.

\*N.23. G; le point B l'est \*: donc  $BG = BC$ : mais on ne tire que deux lignes égales, puisque  $BD > BC$ .

#### PROPOSITION IV.

Fig.88. 126. Dans le Triangle Scalene FGH, les trois angles F, G, H sont inégaux.

\* N. Les trois côtés le sont \*, & par  
120. \* N. conséquent les trois angles \*.

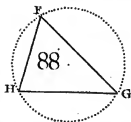
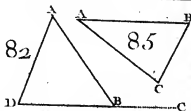
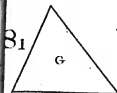
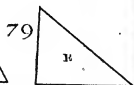
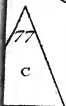
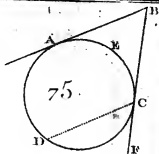
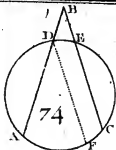
125. PROPOSITION V.

127. Dans le Triangle Isocèle Fig.89. IKL, les deux angles I, L, sur la base sont égaux.

Les deux côtés IK, KL, opposés à ces angles, étant égaux \*,  
\* N. les angles le sont \*.

\* N. De-là, 1°. Dans le Triangle  
125. Isocèle, point d'angle obtus ou droit sur la base: autrement les deux angles sur la base seroient obtus ou droits; & par conséquent les trois angles du Triangle vaudroient plus de deux droits; ce  
\* N. qui n'est pas possible \*.

122.







2°. Dès que les deux angles sur la base sont égaux, le Triangle est Ifocele, les côtés opposés étant égaux.

*EUDOXE.* Cela ne vous donne-t-il pas une manière de mesurer une hauteur accessible AB? Fig. 90.

*ARISTE.* Oui, je m'éloignerai du pied A de la hauteur AB jusqu'à ce que la distance AC fasse avec le rayon visuel CB terminé par la cime B un angle de 45 degrés, observé sur un demi-cercle dont la base sera dirigée parallèlement à l'horison vers A, & l'Alidade, ou la règle mobile, vers B; la distance AC sera égale à la hauteur AB: car l'angle BAC étant droit, & l'angle ACB de 45 degrés, l'angle ABC sera de 45 degrés aussi \*: donc l'angle ABC = ACB: donc les côtés opposés AB, AC seront égaux \*. Ainsi la mesure de la distance AC, sera la mesure de la hauteur AB. \* N.  
122.  
\* N.  
125.

## PROPOSITION VI.

*Fig. 91.* 128. Dans le Triangle équilatéral ABC, les trois angles sont égaux.

\* N. 120. Puisque les trois côtés le sont \*,  
\* N. les trois angles le sont \*.

125. EUDOXE. Je vois assez comment vous faites sur une ligne donnée un Triangle équilatéral.

*Fig. 92.* ARISTE. Ayant décrit des points B, G, intervalle BG, ou  $GB = BG$ , deux cercles qui se coupent en C, je tire des centres B, G, deux lignes BC, GC; & le Triangle BCG formé de ces deux lignes & de la ligne donnée, est  
\* N. équilatéral \*, puisque ses côtés;  
120. étant rayons de cercles égaux, sont égaux.

EUDOXE. Mais s'il faut mesurer une distance inaccessible MO  
*Fig. 93.* par le moyen d'un Triangle équilatéral ....

ARISTE. Dirigeant la base d'un demi-cercle vers O, & l'Alidade

vers N, je fais d'abord l'angle NMO de 60 degrés ; puis sur la même ligne MN, dirigeant la base vers M & l'Alidade vers O, je fais de même l'angle MNO de 60 degrés : donc l'angle MON est aussi de 60 degrés\*, puisque \* N, 60 pris trois fois, fait 180, valeur <sup>122.</sup> du Triangle : donc les trois côtés MN, NO, MO sont égaux\*, les \* N, trois angles étant égaux. <sup>125,</sup>

Ainsi connoissant le côté accessible MN, que je toise, je connois la distance inaccessible MO = MN.

## PROPOSITION VII.

129. Enfin l'angle extérieur au <sup>Fig. 94.</sup> Triangle est égal aux deux intérieurs opposés, pris ensemble.

Je dis que l'angle ABD = A + C.

Les deux angles A & C avec le troisième ABC valent deux droits\* : or l'angle ABC avec \* N, <sup>122.</sup>

# 86 IV. ENTRETEN.

\*N.97. l'angle ABD , vaut aussi deux droits \* , puisqu'une oblique AB fait deux angles égaux à deux droits.

Donc l'angle ABD = A +

\* N. 8. C \* ,

Voilà les Triangles considérés & en général & en particulier.

Les comparerons-nous?

EUDOXE. Volontiers ; & dès ce soir , vous me reverrez.

---

## IV. ENTRETEN.

*Sur les Triangles comparés ensemble.*

EUDOXE. **H**E bien , Ariste , n'ai - je pas tenu ma parole ?

ARISTE. Je voudrois , Eudoxe , être en état de répondre à cet empressement & ....

EUDOXE. Venons d'abord au fait.

## DÉFINITIONS.

130. *ARISTE.* Deux Triangles sont *équiangles* ou *semblables*, quand les angles de l'un sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

131. Deux Triangles sont égaux lorsqu'ils ont les angles égaux & les côtés égaux, chacun à chacun.

132. Un Triangle est circonscrit au cercle quand ses trois côtés touchent le cercle, comme il est inscrit lorsque ses trois sommets touchent le cercle.

## PROPOSITION I.

133. *Dans deux Triangles, si deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre ; le troisième angle est égal au troisième.*

Autrement, la valeur des trois angles de l'un des Triangles ne feroit pas la même que la valeur

# 38 IV. ENTRETEN.

des trois angles de l'autre : or elle

\* N. est la même \*.

122. De-là, 1°. Dès que deux angles d'un Triangle sont égaux à deux angles d'un autre, les deux Triangles

\* N. gles sont semblables \*.

130. 2°. Si l'angle du sommet est le même dans deux Triangles Isocèles, ils sont semblables : car les deux angles sur la base de l'un ou

\* N. de l'autre étant égaux \*, si les angles,

120. sur la base de l'un, étoient plus grands ou plus petits que les angles sur la base de l'autre, la valeur des trois angles des deux Triangles ne feroit pas la même.

## PROPOSITION II.

— 134. Dès que deux Triangles ont leurs côtés égaux, ils sont semblables.

Si les côtés sont égaux, les angles

\* N. gles le sont \* : donc les deux

125. Triangles sont semblables \*.

\* N. 30. De-là, si deux Triangles ont les

les côtés égaux, ils le sont entièrement.

PROPOSITION III.

135. Si deux Triangles rectangles ABC, ADC, ont base commune AC, & un côté égal à un côté; le second côté est égal au second côté. *Fig. 95.*

Soit le cercle ABCD circonscrit au Triangle ABC, dont AC est diamètre\*, puisque l'angle ABC est droit: le cercle passera par le point D, puisque l'angle ADC est droit aussi; soit enfin le côté  $AB = AD$ .

Je dis que le côté  $BC = CD$ .

Les arcs AB & AD soutenus par cordes égales sont égaux\*.

Donc les arcs BC & CD, complemens au demi-cercle, sont égaux: donc les côtés BC, CD sont cordes égales\*: donc le côté  $BC = CD$ .

Ainsi, les deux Triangles sont égaux\*.

PROPOSITION IV.

136. Si deux Triangles ABC, *Fig. 96.*

Tome II.

H

DEF, ont un angle égal, & les côtés qui le comprennent, égaux; le troisième côté est le même.

Soient l'angle  $B = E$ , le côté  $AB = DE$ , & le côté  $BC = EF$ : je dis que le côté  $AC = DF$ .

Mettez les côtés AB, BC, sur les côtés DE, EF: ils conviendront: tous les points se trouveront sur tous les points correspondants, B sur E, A sur D, C sur F:

Donc la distance, la base, ou le côté  $AC = DF$ .

Ainsi, les deux Triangles ABC, DEF sont égaux\*.

*IB 4.* *Fig. 27.* EUDOXE. Vous mesurez apparemment sur ce principe une distance BC qui n'est accessible que par ses extrémités B, C.

ARISTE. 1°. Regardant d'un point D les extrémités B, C, je prens l'angle D, puis la longueur de ses côtés DB, DC.

2°. Ecarté dans la campagne,



je fais un angle  $E = D$ , & prends les côtés  $EF$ ,  $EG$ , égaux aux côtés  $DB$ ,  $DC$ :

Donc le troisième côté  $FG = BC$ .\*

\* N.

Donc en toisant la distance  $FG$  <sup>136.</sup> accessible, j'aurai la distance inaccessible  $BC$ .

# PROPOSITION V.

137. Si deux Triangles ont un côté égal, & les angles sur ce côté égaux; ils ont les deux autres côtés égaux. Fig. 28.

Soient le côté  $ab = AB$ ; l'angle  $a = A$ , &  $b = B$ :

Je dis que le côté  $ad = AD$ , &  $bd = BD$ .

Mettez  $abd$  sur  $ABD$ :

1°.  $ab$  &  $AB$  conviendront, puisque  $ab = AB$ .

2°.  $ad$  parti comme  $AD$ , du même point  $A$ , tombera sur  $AD$ , puisque l'angle  $a = A$ , ou  $bad = BAD$ .

Hij

92 IV. ENTRETEN

3°.  $bd$  parti comme  $BD$ , du même point  $B$ , tombera sur  $BD$ , puisque l'angle  $b = B$ , ou  $abd = ABD$ .

Le point  $d$  tombera donc sur le point  $D$ .

Or les lignes droites entre mêmes points sont égales \*.

Donc  $ad = AD$ , &  $bd = BD$ .

Ainsi les deux Triangles,  $ABD$ , \*  $N. abd$  sont égaux \*, ayant & les angles & les côtés égaux.

*EUDOXE.* Mais s'il est question *Fig 99.* de mesurer une distance  $AB$  accessible par une extrémité  $B$ , inaccessible par l'autre  $A$ , par exemple, la largeur d'une rivière ou d'un étang....

*ARISTE.* 1°. Prolongez la distance inconnue  $AB$ , par une ligne indéfinie  $BC$ .

2°. Tirez une perpendiculaire  $BD$ , sur l'extrémité  $B$  de l'inconnue  $AB$  \*; & mesurez l'angle  $ADB$  *225.* formé par la perpendiculaire  $BD$

SUR LA GÉOMÉTRIE. 93

& le rayon visuel DA terminé par l'autre extrémité A \*. \* N. 93.

3°. Du sommet D de cet angle ; menez une ligne DE , qui coupant AC fasse un angle  $BDE = ADB$ .

Enfin , mesurez le prolongement BE.

Je dis que  $BE = AB$ .

L'angle droit  $EBD = ABD$  droit aussi \* ; & l'angle  $BDE = BDA$  , par la construction. Donc les deux Triangles BED , BAD , ayant un côté commun BD , & les deux angles sur ce côté , égaux , ont tous leurs côtés égaux \*. \* N.

Donc  $BE = AB$ . 137.

PROPOSITION VI.

138. Dans le Triangle isocèle, Fig. 100.  
la perpendiculaire AB , abaissée du  
sommet A de l'angle compris entre  
les deux côtés égaux AC , AD , par-  
tage le Triangle en deux égaux.

94 . IV. ENTRETEN.

Je dis que le Triangle  $ABC = ABD$ .

Les deux angles  $C, D$ , sur la  
<sup>\* N.</sup> base étant égaux\*, aussi-bien que  
<sup>T27.</sup> les deux angles droits en  $B^*$ , les  
<sup>\* N. 95.</sup> deux autres  $BAC, BAD$ , le sont.  
 Donc les deux Triangles  $ABC, ABD$ , ont un côté égal, & les angles sur ce côté, égaux: donc  
<sup>\* N.</sup> le Triangle  $ABC = ABD^*$ .

<sup>T37.</sup> Ainsi la perpendiculaire  $AB$  coupe la base  $CD$ , & l'angle  $CAD$  du sommet en deux également, puisque le côté  $BD = BC$ , & que l'angle  $BAD = BAC$ .

PROPOSITION VII.

<sup>Fig.</sup> 139. Si deux Triangles ont même base, l'angle  $ABC$  du sommet dans celui qui est enfermé, est plus grand que l'angle  $ADC$  du sommet dans celui qui l'enferme.

Je dis que l'angle  $ABC > ADC$ .

Soit  $CB$  prolongée en  $E$ .

L'angle extérieur  $ABC = BAE + AEB$ , intérieurs opposés \* ; \* N.  
 & par la même raison, l'angle <sup>129.</sup>  
 $AEB$  ou  $AEC$ ,  $= ECD + EDC$ ,  
 ou  $ADC$ ; donc l'angle  $ABC >$   
 $AEB > ADC$ : donc l'angle  $ABC$   
 $> ADC$ .

PROBLÈME I.

140. EUDOXE. Incrire dans le <sup>Fig.</sup>  
 cercle S un Triangle semblable à un <sup>102.</sup>  
 Triangle donné  $ABC$ .

ARISTE. 1°. Je tire la Tangente  
 $DFE$  \*. \* N. 83..

2°. Je fais l'angle  $DFG = C$ ,  
 & l'angle  $EFH = B$  \*. \* N.

Puis je mene  $GH$ , & dis que le <sup>103.</sup>  
 Triangle inscrit  $GFH$  est équiangle  
 au Triangle  $ABC$ .

L'angle  $GHF$  a pour mesure  
 la moitié de l'arc  $FG$  \*, mesure de <sup>\* N.</sup>  
 l'angle  $DFG = C$  \* : donc l'an- <sup>114.</sup>  
 gle  $GHF = C$ . \* N. <sup>111.</sup>

Par la même raison, l'angle

56 IV. ENTRETEN

$FGH = EFH = B$  : donc l'angle  $FGH = B$ .

Donc le Triangle  $GFH$  ayant deux angles égaux à deux angles du Triangle  $ABC$ , lui est équiangle\*.

\* N. 733.

PROBLÈME II.

Fig. 141. EUDOXE. Circonscrire au  
203. cercle un Triangle semblable à un Triangle donné  $ABC$ .

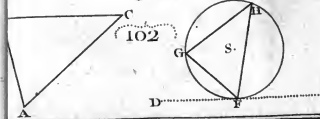
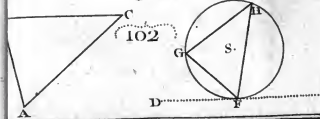
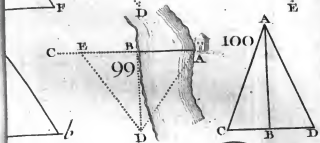
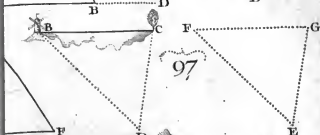
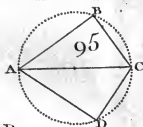
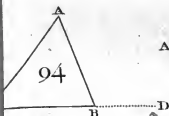
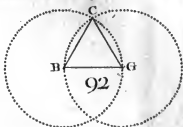
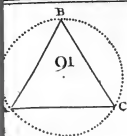
1°. Je tire le rayon  $DE$ , & fais  
\* N. l'angle  $EDF = BCG$ \*, puis l'angle  
208.  $EDH = BAI$ .

2°. Après avoir mené la corde  $EF$ , je mene par les points  $E$ ,  $F$ ,  $H$ , les Tangentes  $KL$ ,  $LM$ ,  
\* N. 83.  $MK$ \*.

Et je dis que le Triangle  $KLM$  est semblable au Triangle  $ABC$ .

Les angles de deux Triangles  
\* N. pris ensemble, valent 4 droits\*.

22. Or puisque  $DE$  &  $DF$  sont perpendiculaires sur les Tangentes\*,  
\* N. 79. l'angle  $LEF$  avec  $FED$  vaut un droit,







droit, aussi-bien que l'angle LFE avec EFD.

Donc l'angle ELF avec EDF, vaut deux droits.

Mais l'Angle  $EDF = BCG$  ; par la construction ; & l'angle BCG avec BCA vaut deux droits \* ; donc l'angle  $ELF =$  \* N. 97. BCA.

Par la même raison, l'angle  $EKH = BAC$ , & par conséquent l'angle  $HMF = CBA$  \*. \* N.

Donc KML est le Triangle <sup>133.</sup> semblable, qu'il falloit circonfcrire.

### PROBLÈME III.

142. EUDOXE. *Inscrire un cercle dans un Triangle ABC.* <sup>Fig. 104.</sup>

ARISTE. 1°. Je partage les angles BAC, ACB par le milieu, tirant les lignes AD, CD \*. \* N.

2°. Du point de rencontre D, <sup>106.</sup> je mene les perpendiculaires DE,

DF, DG, sur les côtés du Triangle ABC\*.

\*N.28. 3°. Du même point D, & de l'intervalle d'une des perpendiculaires, je décris un cercle EFG; & je dis que EFG est le cercle inscrit.

1°. Les angles AED, AGD sont droits, & par conséquent égaux, étant formés par les perpendiculaires DE, DG\*.

2°. Les angles DAE, DAG sont égaux aussi, par la construction; donc les deux Triangles ADE, ADG sont semblables\*, & par conséquent ayant un côté commun AD, ils sont égaux\*. Ainsi  $DE = DG$ , & par la même raison,  $DE = DF$ .

133.

\* N.

137.

Donc DE, DG, DF sont rayons égaux: donc EFG est le cercle inscrit.

Il s'agit maintenant d'examiner en détail & de plus près, les rapports des côtés proportionnels

SUR LA GÉOMÉTRIE. 99  
dans les Triangles comparés. Ne  
fera-ce pas l'occasion de vous re-  
voir ?

EUDOXE. Au premier jour.

---

## V. ENTRETEN.

*Sur les côtés proportionnels dans les  
Triangles.*

ARISTE. Vous me trouvez ,  
Eudoxe, arrangeant  
des lignes & des figures , afin que  
placées dans un certain ordre ,  
elles réveillent dans mon esprit  
des idées suivies.

EUDOXE. Et me voilà tout dis-  
posé à voir ces idées éclore , pour  
ainsi dire , les unes des autres.

ARISTE. Allons donc encore  
pas à pas , par Définitions , par  
Propositions , que vous assaisonne-  
rez de Problèmes.

## DÉFINITIONS.

143. *Espaces paralleles*, sont des espaces compris entre lignes paralleles.

Les lignes ou les côtés qui ont des rapports égaux, sont *proportionnels* (a).

Dans les Triangles semblables, on appelle côtés *homologues*, ou de même nom, ceux qui sont opposés aux angles égaux.



## PROPOSITION I.

Fig. 105. 144. *Deux obliques, qui dans des espaces paralleles égaux, font mêmes angles, sont égales.*

Soient A & B, espaces paralleles égaux;  $CG = EH$ , perpendiculaire mesurant la distance de deux paralleles; l'angle  $CDG = EFH$ .

Je dis que l'oblique  $CD = EF$ .

Les angles  $CDG$ ,  $EFH$  étant

(a) Calcul Littéral, N. 107 & 111.

égaux , aussi-bien que les angles  
 $CGD$  ,  $EHF$  , qui sont droits \* , \* N. 95.  
 l'angle  $C = E$  \* . \* N.

Ainsi les deux Triangles  $DCG$  , 133.  
 $FEH$  , ayant un côté égal , sça-  
 voir,  $CG = EH$  , & les deux an-  
 gles sur ce côté , égaux , sont  
 égaux \* : donc  $CD = EF$  . \* N.

De-là, deux obliques  $AE$  ,  $CF$  ,  
 qui dans des espaces paralleles 137.  
 inégaux font mêmes angles  $E$  ,  $F$  ,  
 sont inégales. Fig. 106.

Je dis que  $AE > CF$  .

Prenez sur  $AB$  la partie  $AH$   
 $= CD$  perpendiculaire de même;  
 & tirez par  $H$  la ligne  $GH$  paral-  
 lele à la base  $EB$  .

1°. L'angle  $AHG = CDF$  ,  
 droit aussi.

2°. L'oblique , qui coupe deux  
 paralleles , faisant les angles aigus  
 de même côté égaux \* , l'angle \* N.  
 $AGH = E = F$  . 104.

Donc les Triangles  $GAH$  ,  
 $FCD$  , sont égaux \* : donc  $AG$  \* N.  
 $= CF$  . 137.

Donc  $AG + GE$ , ou  $AE$ ,  $>$   
 $CF$ .

## PROPOSITION II.

Fig. 145. Une parallele  $AB$  coupant  
 107. la perpendiculaire  $DE$  par le milieu,  
 coupera de même l'oblique  $FG$  dans  
 le même espace  $DFEG$ .

Soit  $DA = AE$  ; je dis que  
 $FB = BG$ .

1°. Les espaces paralleles me-  
 surés par les perpendiculaires  
 égales  $DA$  &  $AE$  sont égaux.

2°. Les obliques  $FB$ ,  $BG$  font  
 \* N. mêmes angles en  $B$ ,  $G$ \*, puis-  
 104. que l'oblique totale  $FG$  fait les an-  
 gles aigus de même côté égaux.

Or les obliques, qui dans des  
 espaces paralleles égaux font mê-

\* N. mes angles, sont égales\*. Donc  
 144.  $FB = BG$ .

De-là, 1°. La parallele  $HK$   
 coupant la perpendiculaire  $DE$   
 aux trois quarts, coupe l'oblique  
 $FG$  de même : car  $HK$  coupant

AE par le milieu H, coupe BG par le milieu K\*.

\* N.

2°. La parallele LN coupant la <sup>145.</sup>perpendiculaire DE au quart, coupe l'oblique FG de même : car LN coupant DA par le milieu L, coupe FB par le milieu N.

3°. Par conséquent, si la perpendiculaire est plus grande ou plus petite, l'oblique l'est à proportion.

### PROPOSITION III.

146. Une ligne parallele AB divisant un espace parallele DFEG, <sup>Fig. 108.</sup> coupe la perpendiculaire DE & l'oblique FG proportionnellement.

Je dis que DA, AE :: FB, BG.

Si  $DA = AE$ ,  $FB = BG$ ; & si  $DA >$  ou  $<$  AE,  $FB >$  ou  $<$  BG à proportion\*.

Donc DA, AE :: FB, BG (a). <sup>\* N. 145.</sup>

147. De-là, Dans deux espa-  
(a) Calcul Littéral, N. 109.

# 104 V. ENTRETIEN

ces parallèles égaux ou inégaux ;  
les lignes également inclinées  
sont entr'elles comme les perpen-  
diculaires.

## PROPOSITION IV.

*Fig. 109. 148. Si deux obliques sont égale-  
ment inclinées dans des especes paral-  
lèles différents  $x, z$ , & que deux  
autres obliques soient également in-  
clinées aussi ; les quatre sont propor-  
tionnelles.*

Soient DE, IK, perpendiculai-  
res ; OP & QR également incli-  
nées, aussi-bien que FG & LM.

Je dis que OP. QR :: FG. LM.

OP. QR :: DE. IK, & FG.

*\* N. 146. LM :: DE. IK \* :* or deux rai-  
sons égales à une troisième sont  
égales entre elles (a) : donc OP.  
QR :: FG. LM.

*Fig. 110. 149. De-là, 1°. Si l'on coupe  
deux côtés AB & BC d'un Trian-  
gle par une ligne DE parallele*

(a) Calcul Littéral, N. 104.



à la base AC, les quatre parties sont proportionnelles.

Tirez FG parallele à DE, & par conséquent à AC \* : Je dis \*N.47. que BE. EC :: BD. DA.

BE & EC sont également inclinées dans deux espaces paralleles, aussi-bien que BD & DA, puisque les angles aigus de même côté BED, BCA fait par l'oblique BC, sont égaux, aussi-bien que BDE, BAC\*.

\* N.

104.

\* N.

Donc \* BE. EC :: BD. DA.

2°. Si les quatre parties des deux côtés coupés dans le Triangle ABC sont proportionnelles, la ligne coupante est parallele à la base.

148.

Fig.

111.

Si BD. DA :: BE. EC, je dis que DE est parallele à AC.

Voulez-vous que DE soit oblique? je tire DH parallele à AC: donc BD. DA :: BH. HC\*; ce qui est faux, puisque BD. DA :: BE. EC par l'hypothèse, & que BE

\* N.

149.

a moindre raison à EC, que BH à HC (a).

Donc DE est parallele à AC.

### PROPOSITION V.

*Fig. 150. Dans les Triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels.*

112.

Soient les Triangles semblables ABC, DEF, entre paralleles différentes AC & GH, DF & IK, avec les perpendiculaires BL, EM.

Les angles A & D sont égaux par l'hypothèse, aussi-bien que C & F: donc les obliques AB, DE sont également inclinées, aussi-bien que BC, EF.

Cela posé, je dis que AB. DE :: BC. EF.

AB. DE :: BL. EM :: BC.

\* N. EF \*: or deux raisons égales à une troisieme sont égales entr'elles (b):

247.

(a) Calcul Littéral, N. 99.

(b) Ibid. N. 104.

donc  $AB. DE :: BC. EF$ .

En un mot,  $AB$  &  $DE$  sont également inclinées dans des espaces paralleles différents,  $BC$  &  $EF$  le sont aussi par l'hypothèse.

Donc  $AB. DE :: BC. EF^*$ . \* N.

Tirez des perpendiculaires des <sup>148.</sup> autres sommets, vous trouverez les mêmes proportions dans les autres côtés.

De - là, dans deux Triangles semblables, les côtés de l'un sont entre eux comme les côtés homologues de l'autre.

Jè dis que  $AB. BC :: DE. EF$ .

$AB. DE :: BC. EF^*$  : donc en \* N. raison alterne (a)  $AB. BC :: DE. EF$ . <sup>150.</sup>

## PROPOSITION VI.

*151. La ligne  $AB$  qui divise en Fig. deux également un angle  $CAD$  d'un <sup>113.</sup> Triangle  $ACD$ , partage la base en*

(a) Calcul Littéral, N. 144.

*deux parties qui sont entre elles comme les côtés.*

Prolongez DA en E, prenant  $AE = AC$ ; puis tirez EC: & je dis que  $DB. BC :: DA. AC$ .

1°. Le Triangle EAC est isocèle, puisque  $EA = AC$ .

2°. L'angle extérieur CAD vaut les intérieurs opposés ACE,

\* N. AEC \*, qui sont égaux, puisque  
129. le Triangle est isocèle.

Donc l'angle  $CAB = ACE$  alterne; car l'angle CAB est moitié de CAD, par la construction:

\* N. donc EC & AB sont parallèles \*:  
102. donc AB est une parallèle qui coupe les côtés CD, DE du Trian-

\* N. gle CED proportionnellement \*:  
149. donc  $DB. BC :: DA. AE = AC$ :  
donc  $DB. BC :: DA. AC$ .

152. De-là, si une ligne AB divise la base CD d'un Triangle proportionnellement aux côtés, elle partage en deux également l'angle opposé CAD.

Si  $DB. BC :: DA. AE = AC$ ,  
je dis que l'angle  $BAC = BAD$ .

Les parties des côtés coupés  
étant proportionnelles, la coupante  $AB$  est parallèle à la base  $EC$  \* :  
donc l'angle  $BAC = ACE$  alter-<sup>149.</sup>  
ne  $= AEC$  \*.

Ainsi, comme l'angle extérieur<sup>151.</sup>  
total  $CAD$ , qui comprend les an-  
gles  $BAC, BAD$ , vaut les inté-  
rieurs opposés égaux \*, l'angle  
 $BAC = BAD$ .<sup>129.</sup>

153. EUDOXE. Je vois que vous <sup>Fig.</sup>  
allez couper une ligne  $AB$  en parties<sup>114.</sup>  
proportionnelles aux parties  $CD$ ,  
 $DE$ , &c. d'une autre  $CF$ .

ARISTE. Soient donc  $AB$  &  
 $CF$  parallèles, coupées par les  
obliques  $CAG, FBG, DHG,$   
 $EIG$ .

1°. L'angle  $GAH = GCD$ , &  
l'angle  $GHA = GDC$  \*. Donc<sup>104.</sup>  
les deux Triangles  $AGH, CGD$   
sont semblables \*.

2°. Par la même raison, les<sup>133.</sup>

Triangles HGI, DGE, &c. le sont.

Cela posé, je dis que  $AH. HI :: CD. DE$ , &c.

Dans les Triangles semblables, les côtés homologues, ou opposés aux mêmes angles, sont pro-

\* N. portionnels \* : donc  $AH. CD ::$   
150.  $HG. DG :: HI. DE$ .

\* N. Donc  $AH. CD :: HI. DE$  \* :  
104. donc en raison alterne (a)  $AH. HI :: CD. DE$ .

Fig. 154. EUDOXE. Je vous donne  
115. deux lignes BC, CD : il faut leur trouver une troisième proportionnelle.

ARISTE. 1°. Je fais des lignes données une ligne droite BCD.

2°. Je prens  $BE = CD$ , pour en faire avec BC un angle quelconque EBC.

3°. De E j'abaisse une ligne droite EC sur C ; & de D, j'élève une parallèle.

(a) Calcul Littéral, N. 144.

4°. Je prolonge BE jusqu'à la parallèle DF; & je dis que le prolongement EF est la troisième proportionnelle, ou que  $BC. CD :: CD. EF$ .

$BC. CD :: BE. EF^* : \text{or } CD = BE$ , par la construction. \* N. 149.

Donc  $BC. CD :: CD. EF$ , ou  $\div BC. CD. EF^*$  \* N.

155. EUDOXE. Enfin, je vous 110.  
donne trois lignes AB, AC, BD : Fig. 116.  
il faut trouver la quatrième proportionnelle.

ARISTE. 1°. De la première AB & de la seconde AC, je fais un angle BAC.

2°. Joignant la troisième BD à la première AB, j'en fais une ligne droite ABD.

3°. Du point de jonction B, je tire une ligne droite en C, & du point D, j'éleve une parallèle à BC.

Enfin, je prolonge AC jusqu'à la parallèle; & je dis que le pro-

longement CE est la quatrième proportionnelle.

\* N. AB. BD :: AC . CE\* : donc  
149. AB. AC :: BD. CE (a).

EUDOXE. D'autres Propositions donneront d'autres Problèmes.

## PROPOSITION VII.

Fig. 156. ARISTE. Si de l'angle droit  
117. ABC d'un Triangle rectangle ACB, on abaisse une perpendiculaire BD sur la base ; elle divisera le Triangle en deux autres semblables au premier.

Je dis que les Triangles ACB , BDC , BDA sont semblables.

1°. Ils ont un angle droit, chacun , ABC par l'hypothèse , & ADB , CDB , formés par la perpendiculaire BD\*.  
\*N. 95.

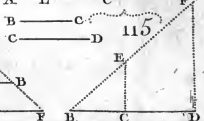
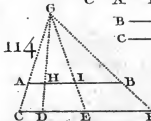
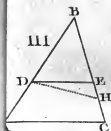
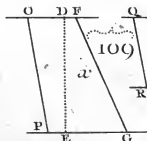
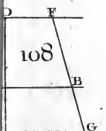
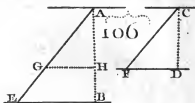
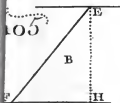
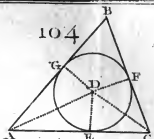
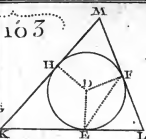
2°. Les deux Triangles ACB & BDC ont l'angle C commun :

\* N. donc ils ont les trois angles égaux\*.  
133. 3°. Les Triangles ACB &

(a) Calcul Littéral , N. 144.

BDA







BDA ont l'angle A commun : donc ils ont aussi les trois angles égaux.

Donc les trois Triangles ayant les angles égaux, sont semblables \*. <sup>\* N.</sup> 130.

## PROPOSITION VIII.

157. *La perpendiculaire abaissée du sommet d'un Triangle rectangle sur l'hypoténuse AC, est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypoténuse.*

Je dis que  $\div$  AD. DB. DC.

Les trois Triangles formés d'un seul par la perpendiculaire étant semblables \*, leurs côtés homologues ou de même nom, sont proportionnels <sup>\* N.</sup> 156. : donc le moyen côté AD du Triangle BDA est au plus petit BD, comme le moyen côté BD du Triangle BDC est au plus petit DC : donc  $\div$  AD. DB. DC. <sup>\* N.</sup> 150.

158. EUDOXE. *Jattens une moyenne proportionnelle entre deux*  
Tome II. K

# 114 V. ENTRETIEN

Fig. *lignes données EF, FG.*

118. *ARISTE.* 1°. Les joignant par leur extrémité F, j'en fais une ligne droite EG.

2°. Du milieu H de la droite EG, je décris un demi-cercle.

3°. Du point commun F, j'éleve à la circonférence une perpendiculaire IF.

Enfin je forme l'angle EIG; & je dis que IF est la moyenne proportionnelle, ou que  $\div EF. IF. FG.$

L'angle EIG appuyé sur le diamètre est droit \*.

115. Et IF est une perpendiculaire, qui aboutit au sommet de l'angle droit, par la construction : donc

\* N.  $\div EF. IF. FG.$

117. Encore quelques Propositions.

## PROPOSITION IX.

Fig. 159. Si deux Triangles ABC, EDF, ont leurs côtés proportionnels, ils sont semblables.

Soient  $AC. AB :: DF. DE$  ;  
 $AB. BC :: DE. EF$  ;  $BC. CA ::$   
 $EF. FD$ .

Je dis que les Triangles  $ABC$  ,  
 $EDF$  sont semblables.

1°. Faites sur  $AB$  l'angle  $BAG$   
 $= D$  , & l'angle  $ABG = E$  : les  
deux Triangles  $EDF$  ,  $GAB$  sont  
semblables \* , ayant les angles \* *N.*  
égaux. 133.

2°. Par l'hypothèse & à cause  
de ces Triangles semblables,  $AC.$   
 $AB :: DF. DE :: AG. AB$ .

Donc deux raisons égales à une  
troisième étant égales entre elles ,  
 $AC. AB :: AG. AB$  (a) : donc le  
côté  $AC = AG$  (b) , puisque deux  
grandeurs qui ont même raison à  
une troisième sont égales.

Par le même principe,  $BC =$   
 $BG$ .

D'ailleurs le troisième côté  
 $AB$  est commun.

(a) Calcul Littéral, N. 104.

(b) Ibid. N. 106.

Donc les deux Triangles ABC, GAB sont égaux, & par consé-

\* N. quent semblables\*.

134. Or le Triangle GAB est semblable au Triangle EDF, par la construction; donc les Triangles ABC, EDF sont semblables.

### PROPOSITION X.

Fig. 119. 160. Deux Triangles sont semblables, dès qu'ils ont un angle égal & les côtés qui le comprennent, proportionnels.

Soient l'angle  $BAC = D$ , & les côtés AB, AC, & DE, DF, proportionnels.

Faites l'angle  $BAG = D$ , le Triangle BAG semblable au Triangle EDF: & je dis que les Triangles ABC, EDF sont semblables.

1°. Par l'hypothèse, AC, AB :: DF, DE :: AG, AB: donc AC.

$AB :: AG$ .  $AB$  (a) : donc  $AC = AG$  (b).

2°. L'angle  $BAC = D = BAG$  par la construction : donc l'angle  $BAC = BAG$ .

Ainsi les deux Triangles  $ABC$  &  $ABG$  ont deux côtés égaux  $AC, AG$ , un côté commun  $AB$ , & un angle égal compris entre deux côtés égaux : donc ils sont égaux \*, & par conséquent semblables \*. \* N.  
138.

Mais les Triangles  $ABG$  &  $EDF$  sont semblables par la construction : donc les Triangles  $ABC$  &  $EDF$  le sont. \* N.  
134.

## PROPOSITION XI.

161. Si d'un point  $A$  hors du cercle, on mene au cercle une Tangente & une Sécante, la Tangente est moyenne proportionnelle entre la Sé- Fig.  
120.

(a) Calcul Littéral, N. 104;

(b) Ibid. N. 106

*cante entiere & sa partie extérieure au cercle.*

Soient AB, Tangente ; AC, Sécante ; AD sa partie extérieure : tirez BC, BD : je dis que  $\therefore$  AC. AB. AD.

1°. Les deux Triangles ABC, ADB ont l'angle A commun.

2°. L'angle inscrit BCD & l'angle du petit segment ABD sont

\* N. égaux, ayant pour mesure, chacun, la moitié de l'arc BD \*.

112 &  
114.

Donc l'angle  $ABC = ADB$  :

\* N. donc les deux Triangles ABC, ADB étant semblables\*, leurs côtés homologues sont proportionnels : or le côté AC du grand Triangle & le côté AB du petit, le côté AB du grand & le côté AD du petit sont homologues, ou opposés aux mêmes angles : donc  $\therefore$  AC. AB. AD.

130.

De-là, 1°. Si l'on tire une autre Tangente AG de l'autre côté de la Sécante AC, AG sera égale.



SUR LA GÉOMÉTRIE. FIG.  
ment moyenne proportionnelle ,  
par la même raison.

2°. Les Tangentes AB &  
AG tirées du même point , étant  
également moyennes propor-  
tionnelles , elles ont même raison  
à la même grandeur AD , & par <sup>\* N.</sup>  
conséquent elles sont égales \*. 106.

3°. Le quarré de la Tangente  
AB est égal au rectangle fait de la  
Sécante AC par sa partie extérieu-  
re AD (a) , puisque dans une pro-  
portion continue , le quarré du  
moyen est égal au produit des ex-  
trêmes.

162. EUDOXE. Et c'est appa-  
remment à la lumière de la dernière  
Proposition , que vous divisez une  
ligne en moyenne & extrême raison ,  
ou en sorte que la plus grande partie  
soit moyenne entre la toute & la plus  
petite partie.

ARISTE. Oui : faut-il diviser la <sup>Fig.</sup>  
ligne AB ? 120.

(a) Calcul Littéral , N. 136.

120 V. ENTRETĒN

1°. De B, j'éleve la perpendiculaire BE, moitié de AB.

2°. De E, intervalle EB, je décris un cercle dont le diamètre vaut AB, valant deux fois EB, moitié de AB.

3°. Je tire la Sécante AC, & fais l'angle CBD.

4°. Sur AB, je prens AF = AD. AF est la plus grande partie appelée la *Médiane*; FB la plus petite; AB, la Toute.

Et je dis que AB est divisée au point F en moyenne & extrême raison, ou que  $\div AB. AF. FB.$

\* N. AC. AB :: AB. AD \* : donc  
261. AC — AB. AB :: AB — AD.

\* N. AD \*.  
244. Or AC — AB = AD, par la

construction, & AB — AF = FB:  
Donc AD. AB :: FB. AD.

Mais AD = AF par la construction : donc AF. AB :: FB. AF.

Donc en raison inverse, AB.  
AF

$AF :: AF.FB$ , ou  $\div AB.AF.FB$  \*.

\* N.

163. EUDOXE. Cela va nous <sup>145.</sup>  
donner un Triangle isocèle dont cha- <sup>Fig.</sup>  
cun des angles de la base soit double <sup>121.</sup>  
de l'angle du sommet.

ARISTE. 1°. Je divise une ligne  
GH en moyenne & extrême rai-  
son \*.

\* N.

2°. Des points H & I, inter- <sup>162.</sup>  
valle GI, médiane, je décris deux  
arcs qui se coupent en K.

3°. Je fais les côtés GK, HK,  
IK; & je dis que GHK est le  
Triangle isocèle dont il s'agit.

Je dis donc que l'angle GHK;  
aussi-bien que GKH, est double  
de l'angle G, ou IGK.

1°.  $HK = IK = GI$ , par la  
construction: donc les deux Trian-  
gles IHK, GIK, ayant, chacun,  
deux côtés égaux, sont isocèles \*.

\* N.

2°. Par la construction, GH. <sup>120.</sup>  
 $GI :: GI.IH$ : donc  $GH.HK = GI$   
 $:: HK.IH$ : donc les deux Trian-

gles  $IHK$ ,  $GHK$ , ayant un angle commun  $KHI$ , & les côtés  $GH$  &  $HK$ ,  $HK$  &  $IH$ , propor-

\* N. tionneis, sont semblables\* : donc  
160. le Triangle  $GHK$  est isocèle aussi.

Or l'angle extérieur  $HIK =$   
 $IGK + GKI$ , intérieurs opposés

\* N. d'un isocèle\*.

129. Donc l'angle  $GHK = HIK$   
 $= IGK + GKI = IGK$  : donc  
l'angle  $GHK$ , aussi-bien que  
 $GKH = GHK$  est double de  
l'angle  $IGK = G$ .

164. De-là, dans un Triangle  
Fig. 122. isocèle  $GHK$ , qui a le sommet au  
centre  $G$  d'un cercle, & pour base  
la médiane  $HK = IG$ , d'un de ses  
côtés, la base  $HK$  est corde de 36  
degrés.

L'angle  $GHK$ , aussi-bien que  
 $GKH$  est double de l'angle  $G$  du  
\* N. sommet\* : donc les angles  $GHK$ ,  
163.  $GKH$ , sont de 72 degrés, cha-  
cun, & l'angle  $G$  de 36 : car 1°.  
72 est double de 36, & deux fois

72 + 36 font 180 , valeur du Triangle.

2°. Tout autre nombre double que 72 , pris deux fois , avec tout autre soudouble , que 36 , n'égaleroit pas 180.

Or l'angle G du sommet étant de 36 degrés , la corde HK l'est aussi , puisque les degrés de l'arc , de l'angle , ou de la corde , sont les mêmes : donc la base HK est corde de 36 degrés.

Ainsi , la mediane du rayon est corde de 36 degrés.

Enfin , les Triangles amènent les Quadrilateres.

*EUDOXE.* Et ce que vous avez dit de ceux-là me fait souhaiter de vous voir développer vos idées sur ceux-ci.

*ARISTE.* Ce sera quand la complaisance ou la politesse vous ramènera ici.

## VI. ENTRETIEN.

*Sur les Quadrilatères.*

EUDOXE. **N**ous passons donc, Ariste, des figures de trois côtés à celles de quatre : rien de plus naturel ; c'est monter par une pente douce.

ARISTE. Aussi, Eudoxe, nous allons bien faire du chemin ; & n'ayant point de temps à perdre, commençons à l'ordinaire par quelques Définitions ; elles seront suivies de Propositions qui donneront les lumières nécessaires pour résoudre les Problèmes.

## DÉFINITIONS.

165. Le Quadrilatère est donc une figure de quatre côtés ; tels sont le Trapeze, le Parallelogramme, ou le Rhombe, le Rhom-

boïde , le Rectangle , le Quarré.

166. Le Trapeze B a ses quatre côtés inégaux ; si le Quadrilatere a deux côtés égaux , les autres inégaux , c'est un Trapezoïde. Fig: 123.

167. Le Parallelogramme a ses côtés opposés égaux & paralleles.

168. Le Rhombe , ou la Lozange C a ses quatre côtés égaux , & ses angles opposés égaux , non droits , mais deux aigus , deux obtus. Fig. 124.

169. Le Rhomboïde D a précisément ses côtés opposés égaux , & ses angles opposés égaux , non droits , mais deux aigus , deux obtus. Fig. 125.

170. Le Rectangle E a ses côtés opposés égaux , & ses quatre angles droits. Le nom de Rectangle se donne spécialement au Quarré-long , quoiqu'il convienne au Quarré. Fig. 126.

## 126 VI. ENTRETIEN

*Fig.* 171. Le Quarré F a ses quatre  
127. côtés égaux, & ses quatre angles  
droits.

172. La Diagonale GH est une  
ligne droite tirée d'un angle à l'au-  
tre d'un Quadrilatere.

173. Un Quadrilatere est ins-  
crit, quand il a tous ses angles  
dans la circonférence d'un cercle;  
& circonscrit si tous ses côtés la  
touchent: le cercle est circon-  
scrit quand il passe par tous les an-  
gles d'une figure.

174. Le Quadrilatere se dési-  
gne par quatre lettres placées aux  
quatre angles, ou par deux, pla-  
cées aux deux angles opposés.

Cela posé, parcourons les pro-  
priétés générales, puis les parti-  
culières.





*Quadrilateres en général.*

## PROPOSITION I.

175. Le Quadrilatere DE vaut quatre angles droits. Fig.  
128.

Il vaut deux Triangles, puisque la diagonale BC le partage en deux Triangles BCD, BCE : or deux Triangles valent quatre angles droits\*.

\* N.  
122.

## PROPOSITION II.

176. Les angles opposés A, C, du Quadrilatere inscrit ABCD, sont égaux à deux droits. Fig.  
129.

Les angles A, C, étant, pris ensemble, appuyés sur toute la circonférence, A, sur BCD, C, sur BAD ; ils ont pour mesure la demi-circonférence\* : donc ils valent deux droits\*.

\* N.  
114.  
\* N. 94.

C'est la valeur des deux autres angles B, D, par la même raison.

*Parallelogrames en général.*

## PROPOSITION I.

*Fig.* 177. Si les côtes opposés BC &  
 130. DE, BD & CE, d'un Quadrila-  
 tere, sont égaux, ils sont paralleles.  
 Soit la diagonale BE partageant  
 la figure en deux Triangles BEC,  
 BED.

Puisque le côté  $BC = DE$ , &  
 $BD = CE$ , & que BE est com-  
 mun, les deux Triangles sont  
 égaux, & par conséquent équi-  
 \* N. angles \*: donc les angles alternes  
 134. correspondants, BED, CBE, ou  
 BEC, DBE, sont égaux. Or les  
 lignes qui avec l'oblique ou la dia-  
 gonale BE font les angles alter-  
 \* N. nes égaux, sont paralleles \*: donc  
 102. BC & DE, BD & CE sont pa-  
 ralleles.

## PROPOSITION II.

*Fig.* 178. Dès que deux côtés opposés  
 130.

BC, DE d'un *Quadrilatere* sont égaux & parallèles, les autres BD, CE, le sont.

Les angles alternes BED, CBE, étant égaux\*, & les côtés qui les comprennent, égaux, <sup>\* N. 101.</sup> les Triangles BCE, BDE, le sont\*: donc 1°. Les côtés correspondants BD, CE, sont égaux. <sup>\* N. 136.</sup> 2°. Les angles alternes BEC, DBE étant égaux, les côtés BD & CE qui font ces angles avec l'oblique BE, sont parallèles\*. <sup>\* N. 102.</sup>

### PROPOSITION III.

179. Si les côtés opposés d'un *Quadrilatere* sont égaux, c'est un *Parallelograme*.

Ces côtés égaux sont parallèles\*: donc, c'est un *Parallelograme* \*. <sup>\* N. 177.</sup>

### PROPOSITION IV.

180. Les angles opposés d'un *Parallelograme* sont égaux. <sup>Fig. 131.</sup>

130 VI. ENTRETIEN

Je dis que l'angle  $A = B$ , & l'angle  $C = D$ .

L'angle A avec D vaut deux droits, aussi-bien que l'angle B avec D\*, puisque si une oblique  
 103. coupe deux paralleles, les angles internes de même côté valent 2  
 \* N. 8. droits : donc l'angle  $A = B$ \* : car les grandeurs, qui jointes séparément avec la même, font même grandeur, sont égales.

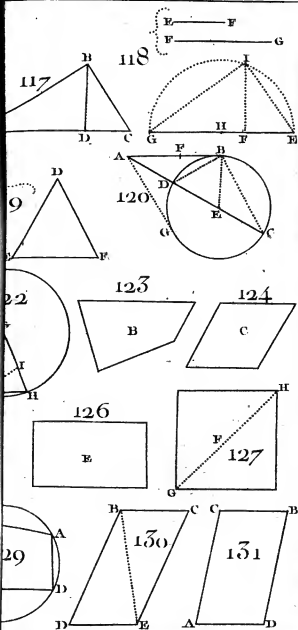
Par la même raison, l'angle  $C = D$ .

PROPOSITION V.

Fig. 181. La Diagonale AE partage le Parallelograme en deux Triangles égaux.  
 132.

Je dis que le Triangle ABE = ADE.

\* N.  $AB = DE$ , &  $AD = BE$ \*,  
 167. AE est commun : donc le Triangle ABE a ses trois côtés égaux à ceux du Triangle ADE : donc le  
 \* N. Triangle ABE = ADE\*.  
 134.





## PROPOSITION VI.

182. Les Parallelogrames entre mêmes parallèles & sur même base <sup>Fig. 133.</sup> sont égaux.

Soient le Rectangle AC & le Rhomboïde CE entre les parallèles AF, BH, & sur la base BC : je dis que  $AC = CE$ .

1°.  $AB = DC$ ,  $BE = CF$ ,  $AD = EF$  \* par la définition. \* N.

2°. Aux côtés égaux AD & EF, <sup>167.</sup> ajoutez DE :  $AE = DF$  \*.

Donc les deux Triangles BAE, CDF, ayant côtés égaux, sont égaux \* : retranchez-en la grandeur commune DEG : les restes <sup>134.</sup> oules TrapezesABGD & CGEF sont égaux \*. \* N. 10.

Enfin, aux restes égaux, ajoutez la grandeur commune BGC : vous avez  $AC = CE$ .

183. De-là, 1°. La hauteur du Parallelograme est une perpendi-

culaire FH abaissée du sommet sur la base prolongée.

184. 2°. Les Parallelogrames AC, CE, qui ont même base & même hauteur perpendiculaire  $FH = DC$ , sont égaux, étant compris entre mêmes parallèles sur même base.

185. 3°. Pour mesurer un Parallelograme CE; il suffit d'avoir égard à sa base BC & à la perpendiculaire FH qui mesure sa hauteur: car la base BC multipliée par la perpendiculaire FH, donne un rectangle AC égal à un Parallelograme quelconque CE de même base & de même hau-

\* N. teur\*.

184. 186. Ainsi, un Parallelograme est le produit de sa base par sa hauteur, ou de sa hauteur par sa base; & les Parallelogrames de même base, sont comme leurs hauteurs, ou au contraire, les produits par même multiplicateur



étant comme les grandeurs multipliées (a).

*EUDOXE.* Je vous donne la valeur d'un Parallelograme & un de ses côtés : comment trouvez-vous l'autre ?

*ARISTE.* Je divise la valeur donnée du Parallelograme par le côté connu ; & le quotient est l'autre côté ; car cet autre côté est celui , qui multiplié par le côté connu , fait le Parallelograme \* : \* N. or le Quotient multiplié par le côté qui est le diviseur , forme le Parallelograme , puisque le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende (b).

## PROPOSITION. VII.

187. Les Parallelogrames sont doubles des Triangles de même base <sup>Fig 1</sup> 134. & de même hauteur.

Les Parallelogrames AD, BF, & le Triangle BED ont même

(a) Cal. Lit. N. 147. (b) Cal. num. n. 30.

# 134 VI. ENTRETEN

base BD & même hauteur FG  
= CD , comprise entre mêmes

\* N. paralleles \*.

183. Or, 1°. Le Parallelograme BF

\* N. est double du Triangle BED \* ,

181. puisque la diagonale ED coupe  
le Parallelograme en deux Triangles égaux.

2°. Le Parallelograme AD =

\* N. BF \* est double aussi du Triangle

182. BED.

Donc les Parallelogrames , &c.

188. De-là , 1°. La hauteur du

Triangle est une perpendiculaire

\* N. abaissée du sommet sur la base \* ,

183. & les Triangles de même base ,  
ainsi que les Parallelogrames , sont  
comme leurs hauteurs , ou au

\* N. contraire \* , puisque les moitiés

186. \* N. II. sont comme les tous \* ; & par  
conséquent les Triangles comme  
les Parallelogrames , de même base  
& de même hauteur , sont  
égaux.

189. 2°. Multipliez la base

d'un Triangle par sa hauteur ; vous avez un Parallélograme dont la moitié fera la valeur du Triangle ; ou bien multipliez la base par la moitié de la hauteur , ou enfin la hauteur par la moitié de la base : & le produit qui fera la moitié du Parallélograme , fera la valeur du Triangle.

190. 3°. Un Triangle en vaut plusieurs de même hauteur dont les bases , prises ensemble , valent la sienne.

Je dis que le Triangle  $ABC =$  *Fig. 135.*  
 $BDE + EFG + GHC.$

Les trois Triangles  $BDE$  ,  $EFG$  ,  $GHC$  sont la moitié du Parallélograme  $BH$  , puisque chacun est la moitié de l'un des trois petits Parallélogrames qui font le grand  $BH$  \* : or le Triangle  $ABC$  \* *N.*  
 est la moitié du Parallélograme *187.*  
 $BH$  : donc le Triangle  $ABC =$   
 $BDE + EFG + GHC.$

*EUDOXE. Il s'agit de partager*

## 136 VI. ENTRETEN

*un champ triangulaire en deux parties égales.*

- Fig. 136. *ARISTE.* Soit le plan triangulaire BCD ; après avoir décrit par le sommet C une ligne FG parallèle à la base BD, jirez une ligne CE sur le milieu E de la base : les deux Triangles BCE, DCE seront les deux parties égales \* , ayant même base , puisque  $BE = ED$  par la construction , & même hauteur , puisqu'ils sont entre mêmes parallèles.

\* N. 138.

Et voilà le plan mesuré.

## PROPOSITION VIII.

- Fig. 137. 191. Si l'on tire deux lignes BF , CE parallèles aux côtés GH , AH d'un Parallelograme par un point D de la diagonale IH ; elle partagera le Parallelograme en quatre , dont deux que la diagonale ne traversera pas , seront égaux.

Je dis que le Parallelograme  $AD = DG$ .

Le

Les Triangles  $HIA = HIG$ ,  
 $HDB = HDE$ ,  $DIC = DIF^*$ , <sup>\* N.</sup>  
 puisque la diagonale divise en <sup>181.</sup>  
 deux Triangles égaux chaque Pa-  
 rallelograme qu'elle coupe.

Donc, puisque  $AD$  &  $DG$  joints  
 à grandeurs égales, font gran-  
 deurs égales  $AD = DG^*$ .

\* N. 8.

192. EUDOXE. Soient le Trian-  
 gle  $ABC$  & l'angle  $D$ : il faut faire <sup>Fig.</sup>  
 un Parallelograme égal au Triangle <sup>138.</sup>  
 donné  $ABC$ , & qui ait un angle  
 égal à l'angle donné  $D$ .

ARISTE. Hé bien, 1°. Par le  
 sommet  $A$  du Triangle  $ABC$ , je  
 tire une parallele  $AE$  à la base  $BC$ .

2°. Sur le milieu  $F$  de la base,  
 j'éleve une ligne  $FH$ , faisant avec  
 la moitié  $FC$  de la base un angle  
 $CFH$ , égal à l'angle donné  $D^*$ . <sup>\* N.</sup>

3°. De  $C$ , je mene une paralle- <sup>108,</sup>  
 le à  $FH$ .

Enfin du sommet  $A$ , j'abaisse  
 une ligne  $AF$  sur le milieu de la  
 base, & je dis que  $CEHF$  est le

138 VI. ENTRETEN

Parallelograme en question.

187. 1°. CEHF est double du Triangle ACF \*, ayant même base & même hauteur, comprise entre mêmes paralleles ; & le Triangle ABF = ACF de même hauteur & de même base, par la conf-

\* N. truction \* :

188. Donc CEHF est égal au Triangle ABC.

2°. L'angle CFH = D, par la construction.

Donc CEHF est le Parallelograme qu'il falloit faire.

Fig. 189. EUDOXE. Mais on vous donne une ligne A, un Triangle B, un angle C : il s'agit de faire sur cette ligne un Parallelograme qui soit égal au Triangle B, & qui ait un angle égal à l'angle C.

ARISTE. 1°. Je fais un Parallelograme EF égal au Triangle B, ayant un angle F égal à l'angle

\* N. donné C\*.

192. 2°. Je prolonge FG & DE fait-

fant  $GH = A = EI$  jointe par  $IH$ .

3°. Je tire la diagonale  $IK$ , puis  $FK$ ,  $KL + LM$  jointe par  $MH$ .

$DM$  est un Parallelograme partagé en plusieurs.

Et je dis que  $GM$  est celui que l'on demande.

1°. Le Parallelograme  $GM = EF = B^*$ , n'étant pas traversé par la diagonale  $IK$ . \* N.  
191.

2°.  $GM$  est fait sur  $GH = A^*$  par la construction. \* N.  
104.

3°. L'angle  $GLM = EGH = DFG = C$ , par la construction.

Donc  $GM$  est le Parallelograme en question.

193. Enfin les Parallelogrames semblables sont ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun, & leurs côtés homologues, ou faisant mêmes angles, proportionnels.

Cela posé;

Mij

## PROPOSITION IX.

Fig. 194. La raison de deux Parallelogrames A, B, est une raison composée de celles de la base à la base & de la hauteur à la hauteur.

Soient  $c, d$ , les bases ;  $e, f$  les hauteurs ;  $c. d$  &  $e. f$  ou  $\frac{c}{d}$  &  $\frac{e}{f}$ , font les raisons de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Multipliez les antécédens  $c, e$ , l'un par l'autre, & les conséquens  $d, f$ , de même : vous avez dans les produits les deux rectangles A, B.

186.

Or la raison du produit des antécédens & du produit des conséquens de deux raisons est une raison composée de ces deux raisons (a) : donc la raison de deux Parallelogrames est une raison composée de celles de la base à la

(a). Calcul Littéral, N. 177.



base, & de la hauteur à la hauteur (a).

### PROPOSITION X.

195. *La raison des Parallelogrames semblables est doublée de celles de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.*

Dans ces Parallelogrames, les hauteurs sont comme les bases \*. \* N.

Donc la raison de ces Parallelogrames est composée de raisons égales \*: donc c'est une raison doublée (b). 193. \* N. 194.

196. De-là, 1°. Les Parallelogrames semblables sont comme les quarrés des exposans de leurs côtés homologues, la raison doublée ayant pour exposans des nombres quarrés (c).

(a) Aussi, soient  $a$  &  $b$  les bases;  $c$  &  $d$  les hauteurs;  $A$  &  $B$  les Parallelogrames: donc  $ac = A$ , &  $bd = B$ . Or  $\frac{ac}{bd}$  est la raison composée de  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ .

(b) Calcul Littéral, N. 170.

(c) Ibid. N. 182.

## 142 VI. ENTRETIEN.

Fig. 140. Par exemple, si  $c. d :: e. f$ , que  $c$  soit moitié de  $d$  &  $e$ , moitié de  $f$ ; les exposans feront  $1. 2 :: 1. 2$ ; & la raison doublée  $1. 4$ , ou  $\frac{1}{4}$ , est exprimée en nombres quarrés.

Ainsi, les Parallelogrames sont comme les quarrés de leurs côtés homologues ou correspondants.

197. 2°. Les Triangles semblables qui sont moitié de Parallelogrames semblables\*, sont en raison doublée de leurs côtés homologues, & par conséquent comme les quarrés de ces côtés, les moitiés étant comme les  
\*N. II. tous\*.

Venons aux Rectangles.

*Les Rectangles en particulier.*

### PROPOSITION I.

198. Deux Rectangles semblables sont entre eux comme les quarrés des exposans de leurs côtés homologues.

Ce sont des Parallelogrames  
semblables\* : donc ils sont entr'eux \* N.  
comme les quarrés des exposans <sup>165.</sup>  
de leurs côtés homologues\* . \* N.

*EUDOXE.* Vous allez détermi- <sup>196.</sup>  
ner le rapport de deux rectangles  
semblables A, B.

*ARISTE.* Le quarré des antécé-  
dens & le quarré des conséquens  
des exposans expriment ce rap-  
port\* .

Si la base est moitié de la base ; \* N.  
& la hauteur, de la hauteur ; les <sup>197.</sup>  
exposans seront 1. 2 :: 1. 2. je mul-  
tiplierai 1 par 1, 2 par 2, les pro-  
duits seront les quarrés 1. 4 & je  
dirai A. B :: 1. 4, où  $B = 4A$ .

199. Maintenant deux rectan-  
gles sont figures reciproques  
quand la longueur du premier est  
à celle du second, comme la hau-  
teur du second à celle du premier.

Cela posé ;

## PROPOSITION II.

Fig. 141. *Deux rectangles A, B, réciproques sont égaux.*

Soit  $a$ , la longueur du premier,  $b$ , sa hauteur;  $c$ , la longueur du second,  $d$  sa hauteur: donc  $ab$

$$^* N. = A, \text{ \& } cd = B^*.$$

186. Et je dis que  $ab = cd$ .

Par l'hypothèse,  $a. c :: d. b$ : donc le produit des extrêmes étant égal au produit des moyens ( $a$ ),  $ab = cd$ .

Si  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2$ , &  $d = 4$ ; le premier rectangle fera  $4 \times 2 = 8$ , & le second fera  $2 \times 4 = 8$ .

## PROPOSITION III.

200. Enfin, dans un Quadrilatère inscrit, le rectangle fait des deux diagonales multipliées l'une par l'autre, vaut la somme des deux rectangles des côtés opposés.

Fig. 142.

(a) Calcul Littéral, N. 136.

Je

Je dis que  $AB \times CD = AC \times BD + BC \times AD$ .

Soit AE faisant l'angle DAE = BAC.

1°. L'angle inscrit ACE = ABD sur même arc \*, & l'angle \* N.  
CAE = BAD formé de l'angle <sup>115.</sup>  
DAE = BAC & de l'angle BAE  
ou FAE commun. Donc les  
Triangles ACE & ABD sont sem-  
blables \* : donc AC, CE :: AB. \* N.  
BD \* : donc  $AB \times CE = AC \times$  <sup>133.</sup>  
BD\*. <sup>150.</sup>

2°. L'angle inscrit ABC = <sup>\* N.</sup>  
ADE = ADC sur même arc \* & <sup>135.</sup>  
BAC = DAE, par la construction : <sup>115.</sup>  
donc les Triangles ACB, AED  
sont semblables \* : donc BC. AB \* N.  
:: ED. AD : donc  $AB \times ED =$  <sup>133.</sup>  
BC  $\times$  AD\*. <sup>\* N.</sup>

Donc  $AB \times CE + ED$ , ou <sup>135.</sup>  
 $AB \times CD = AC \times BD + BC \times$   
AD.

Reserverons-nous les Quarrés  
pour le premier Entretien?

*EUDOXE.* Ils suffisent pour en faire la matière.

## VII. ENTRETIEU.

*Sur les Quarrés en particulier.*

201. *EUDOXE.* Vous me re-  
voyez, Ari-  
ste, plutôt apparemment que vous  
ne le pensiez.

*ARISTE.* Et c'est encore trop  
tard.

*EUDOXE.* Peut-être faisiez-vous  
là quelques réflexions sur les figu-  
res quarrées.

*Fig.*  
143. *ARISTE.* Justement; je disois :  
une ligne droite AC parcourant  
perpendiculairement une ligne  
égale AB décrit un quarré AD.

Car 1°. Les côtés AC & BD  
sont parallèles étant perpendicu-  
\*N.44. laires sur AB\* ; AB, CD sont pa-  
rallèles de même, puisque leur

distance est mesurée par deux perpendiculaires égales  $AC, BD$  \*. \* N. 40.

2°. Les quatre angles  $A, B, C, D$ , sont droits \*: car  $AC, BD$  \* N. 95. perpendiculaires sur  $AB$ , le sont sur  $CD$  parallèle à  $AB$  \*. \* N. 46.

3°. Les quatre côtés sont égaux,  $AB = AC = BD$ , par la construction; &  $CD = AB$  \*, puisque ce sont deux perpendiculaires entre mêmes parallèles. \* N. 40.

Donc  $AD$  est un carré \*. \* N.

202. Ainsi, une perpendiculaire multipliée par elle-même, ou par une ligne égale, donne un carré, & la figure carrée est le produit d'une ligne multipliée par elle-même. 171.

203. EUDOXE. Je vois assez comment vous décririez un carré sur une ligne donnée  $AB$ .

ARISTE. 1°. J'élèverois sur  $A$  la perpendiculaire  $AC = AB$  \*. \* N.

2°. Faisant couler  $AC$  perpendiculairement sur  $AB$  d'un bout à 115.

\* N. l'autre, j'aurois le quarré AD\*.  
 201. Cela supposé ; commençons  
 par la célèbre Proposition de Py-  
 tagore.

## PROPOSITION I.

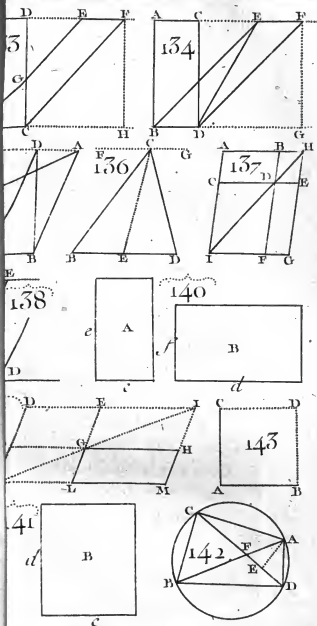
Fig. 204. Dans le Triangle rectan-  
 144. gle le quarré de l'hypoténuse est égal  
 aux quarrés des deux autres côtés.

Soient ABC Triangle rectangles  
 AE, quarré de l'hypoténuse AC ;  
 AI & CF, quarrés des côtés AB  
 & BC ; BKL partageant le quarré  
 AE en deux rectangles AL, KE ;  
 BD & BE, CH & AG obliques.

Je dis que le quarré  $AE = AI + CF$ .

1°. Le côté  $AH = AB$  côté  
 \* N. du même quarré \*,  $AC = AD$ ,  
 171. & l'angle  $HAC = BAD$ , puis-  
 qu'ils sont faits chacun, d'un an-  
 gle droit HAB ou DAC, & d'un  
 angle commun BAC : donc les  
 deux Triangles ACH, ABD,  
 ayant deux côtés égaux à deux cô-







SUR LA GÉOMÉTRIE. 149  
rés, & les angles compris, égaux,  
sont égaux \*.

Or le Triangle ACH est moitié <sup>136.</sup>  
du carré AI\*: car il a même ba- \* N.  
se AH & même hauteur perpen-  
diculaire AB, puisqu'il est con-  
tenu entre mêmes parallèles HA  
& IB prolongée en C. <sup>187.</sup>

Le Triangle ABD est aussi moi-  
tié du rectangle AL, ayant même  
base AD & même hauteur AK,  
comprise entre les parallèles AD  
& LK + KB.

Donc la moitié du rectangle  
AL vaut la moitié du carré AI :  
donc  $AL = AI$  \*.

\* N. II.

2°. Par la même raison, le rec-  
tangle KE vaut le carré CF.

Donc le carré entier  $AE =$   
 $AI + CF$ .

EUDOXE. La Proposition se dé-  
montre encore autrement, ce  
semble.

ARISTE. Je vous écoute à mon  
tour.

N iij

## 150 VII. ENTRETEN.

Fig. 245. *EUDOXE.* Soit le Triangle rectangle ABC, réduit par la perpendiculaire BD en trois Triangles semblables\*, dont les côtés homologues sont proportion-

\* N. nels\*.  
250. Je dis que  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  (a).

\* N.  $\therefore AC. AB. AD^*$ : donc  $AC \times AD = AB^2$  (b).

De même  $\therefore AC. BC. DC$ : donc  $AC \times DC = BC^2$ :

Or  $AC \times AD + AC \times DC$ , ou  $AC \times AD + DC = AC^2$ .

Donc  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ .

*ARISTE.* La Démonstration est plus précise. Venons à l'inverse de la Proposition.

## PROPOSITION II.

Fig. 205. Si le carré de l'un des côtés d'un Triangle ABC est égal aux

(a) Calcul Littéral, N. 21.

(b) Ibid. N. 136.

*quarrés des deux autres côtés, l'angle compris entre ces deux autres côtés est droit.*

Soient  $BD = AB$ , & perpendiculaire sur le point B de BC, faisant l'angle droit CBD;  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Tirez l'hypoténuse CD.

Je dis que l'angle ABC est droit.

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 = AB^2 * \quad * N.$$

$$\text{Or } AC^2 = BC^2 + AB^2 = 204. BD^2:$$

$$\text{Donc } AC^2 = CD^2.$$

Donc  $AC = CD$  (a), les racines étant égales, quand les puissances le sont.

Donc, les deux Triangles ayant les côtés égaux sont semblables \*. \* N.

Donc puisque l'angle CBD est <sup>134.</sup> droit par la construction, l'angle correspondant ABC l'est.

(a) Calcul Littéral, N. 186.

# 152 VII. ENTRETEN.

Fig. 206. EUDOXE. Si l'on vous  
147. demande un quarré égal à deux  
quarrés donnés....

ARISTE. Soient AB, BC, côtés des deux quarrés donnés.

1°. Je fais de ces côtés un angle droit ABC\*.

115. 2°. Je lui tire une base AC; & je dis que  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ .

AC est l'hypoténuse, & AB, BC sont les côtés d'un Triangle rectangle ABE\*: donc  $AC^2 =$   
120. \* N.  $AB^2 + BC^2$ \*.

204. Fig. 207. EUDOXE. Mais s'il faut  
148. un quarré égal à trois....

ARISTE. Soient AD, AB, BC, côtés des trois.

1°. Ayant fait de AB, BC, un angle droit, je tire la base AC.

2°. Ayant fait de AC, AD un angle droit, je mene la base CD.

Et je dis que  $CD^2 = AD^2 +$   
\* N.  $AB^2 + BC^2$ .

204.  $CD^2 = AC^2 + AD^2$ \*: or  $AC^2$   
\* N.  $= AB^2 + BC^2$ \*, donc  $CD^2 =$   
206.

$AD^2 + AB^2 + BC^2$  : on trouvera de même un quarré égal à quatre.

PROPOSITION III.

208. Dans un Triangle obtusangle, le quarré de la base,  $a$ , de l'angle obtus, vaut les quarrés des autres côtés  $b, c$ , plus deux fois le plan du côté,  $c$ , par le prolongement,  $d$ , de ce côté depuis le sommet de l'angle obtus jusqu'à la perpendiculaire,  $e$ , tirée de l'angle  $F$  opposé à ce côté  $c$ . Fig. 149.

L'angle  $G$  étant droit \*, les \* N. 95. Triangles  $bde, ac + d \& e$ , sont rectangles en  $G$  \*.

Cela posé; je dis que  $a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$ .

1°.  $e^2 = b^2 - d^2$ , puisque  $b^2 = d^2 + e^2$  \*.

2°.  $\overline{c + d} \times \overline{c + d} = c^2 + 2cd + d^2$  (a).

Or  $a^2 = e^2 + \overline{c + d} \times \overline{c + d}$  \*.

Donc  $a^2 = b^2 - d^2 + c^2 + 2cd + d^2$ .

(a) Calcul Littéral, N. 35.

Mais  $-d^2 + d^2 = 0$  (a).

Donc  $a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$ .

Maintenant pour parvenir à une certaine Proposition qui s'offre à mon esprit, j'en fais une autre.

#### PROPOSITION IV.

209. Si deux Triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, & que l'angle compris entre les deux côtés du premier soit supplément de l'angle compris entre les deux côtés du second, les deux Triangles sont égaux.

Fig. 150. Si  $AB = DC$ , &  $BE = DF$ ; que l'angle CDF soit supplément de l'angle ABE, ou que l'angle CDF avec ABE fasse la valeur de deux droits; je dis que le Triangle  $AEB = DFC$ .

Soit AB prolongée en G;  $BG = DC = AB$ , HI, parallèle à AG.

(a) Calcul Littéral, N. 4.



1°. L'angle EBG est supplement de ABE \* par la construction, \* N. 97. comme l'angle FDC l'est par l'hypothèse : donc l'angle EBG = FDC.

2°. BG = DC par la construction, & BE = FD, par l'hypothèse.

Donc le Triangle BEG = DFC \*, puisque deux Triangles \* N. 136. sont égaux dès qu'ils ont un angle égal, & les côtés qui le comprennent, égaux.

Or le Triangle AEB = BEG sur base égale & entre mêmes parallèles \*.

Donc le Triangle AEB = DFC. \* N. 188.

Cela supposé;

#### PROPOSITION V.

210. Si l'on fait trois quarrés AG, BH, BI sur les trois côtés d'un Triangle ABC; & qu'on joigne les côtés opposés à ceux de ce Triangle; il se forme trois Triangles, égaux, chacun, au Triangle. Fig. 152.

156 VII. ENTRETIEN

Je dis d'abord que le Triangle  $BDE = BAC$ .

1°. Les deux côtés  $BD, BE$ , sont égaux aux deux côtés  $BA, BC$ , par la construction.

2°. Les quatre angles dont le cercle  $B$  est mesure, valent quatre droits \* ; & les deux angles

\* N.  $ABD, CBE$  sont deux droits \*.

171.

Ainsi les deux angles  $DBE, ABC$  valent deux droits : donc l'angle  $ABC$  est supplement de  $DBE$  compris entre deux côtés égaux :

Donc le Triangle  $BDE =$   
\* N.  $BAC$  \*.

209.

Par la même raison , les deux autres Triangles  $AIF, GCH$ , sont égaux , chacun , au Triangle  $ABC$ .

Fig. 211. De-là , si sur les quatre  
152. côtés d'un trapeze  $AC$ , on fait quatre quarrés , & qu'on les joigne ; il se forme quatre Triangles qui , pris ensemble , valent le double du trapeze.

Car 1°. Le Triangle ECF =  
BDC, & le Triangle HAG =  
BDA \* : donc les deux Triangles \* N.  
ECF, HAG valent le Trapeze. 210.

2°. Par la même raison, les  
deux autres Triangles IBK,  
LDM, ont la même valeur.

Donc si sur les quatre côtés,  
&c.

# PROPOSITION VI.

212. *Les quarrés sont en raison  
doublée de leurs côtés, ou comme les  
quarrés des exposans de leurs côtés.*

EUDOXE. Ce sont rectangles  
semblables, puisqu'ils ont tous  
leurs angles droits, & leurs cô-  
tés proportionnels: donc, &c.\* \* N.

Mais la diagonale du quarré.... 198.

# PROPOSITION VII.

213. ARISTE. *La diagonale BC*  
*du quarré DE est incommensurable à 153,*  
*son côté BD (a).* Fig.

(a) Calcul Littéral, N. 96.

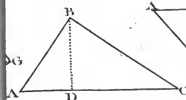
Si BC & BD étoient commensurables , ou s'ils avoient une commune mesure , la raison de BC à BD seroit une raison de nombre à nombre (a), puisqu'une partie de BC , prise un certain nombre de fois , mesurerait exactement BC & BD , comme l'unité mesure deux nombres :

Or la raison de BC à BD n'est pas une raison de nombre à nombre : si elle l'étoit , toute raison doublée de cette raison auroit pour exposans des nombres quarrés (b) ; ce qui n'est pas : car la raison du quarré de BC au quarré de BD est doublée de celle de  
 208. \* N. BC à BD \* , les quarrés étant en raison doublée de leurs côtés : or la raison des quarrés de BC & de BD n'a pas pour exposans des nombres quarrés : car le côté BD  
 171. \* N. = DC \* : donc le quarré de BC ,

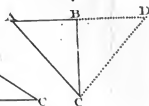
(a) Calcul Littéral , N. 189.

(v) Ibid. N. 189.

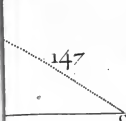
145



146



147

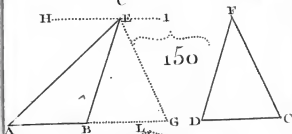


148

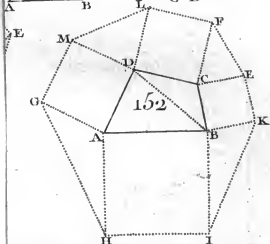


H.....E.....I

150



152





qui vaut les deux quarrés égaux de BD & de DC \*, est double \* N. du quarré de BD. Ainsi, les ex-<sup>200.</sup>posans de la raison des quarrés de BC & de BD sont 2, 1.

Mais 2, 1, ne sont pas nombres quarrés : 1 l'est; 2 ne l'est pas (a) : point de nombre qui multiplié par lui-même donne 2.

Donc la raison de BC à BD n'est pas de nombre à nombre : donc BC & BD sont incommensurables.

Cependant le quarré de la diagonale BC & le quarré du côté BD sont commensurables, puisque ces quarrés sont comme nombre à nombre, ou comme 2 à 1 \*. \* N.

De-là, la diagonale & le côté <sup>204.</sup>du quarré sont incommensurables en eux-mêmes, & commensurables en puissances.

(a) Calcul numérique, N. 24.

## PROPOSITION VIII.

Fig. 214. Chaque point de la diagonale AC d'un quarre BD est également éloigné des deux côtés AB, AD, de l'angle BAD d'où elle part.

Je dis que la distance  $EG = EF$ .

1°. Le Triangle isocèle ACB  
 \* N. = ACD \* : donc l'angle EAG  
 120. \* N. = EAF \*.

127. 2°. EG, EF, mesures des distances du point E, étant perpendiculaires \*, l'angle AGE = \* N. 95. AFE droit \*.

3°. Le côté AE = EA commun.

Donc les deux Triangles  
 \* N. AEG, AEF, sont égaux \* : donc  
 136. ils ont leurs côtés proportionnels \* : ainsi, EG. EF :: EA. AE :  
 150. or EA = AE : donc EG = EF.

PROP.



## PROPOSITION IX.

215. Un Parallelograme fait sur la diagonale d'un quarré, & ayant <sup>Fig. 154.</sup> un angle commun avec le quarré, est un quarré.

Je dis que le Parallelograme FG fait de la sorte est un quarré.

1°. Dans un Parallelograme, les côtés opposés sont égaux & paralleles \*; donc  $AG = EF$ , &  $AF = EG$ . <sup>\* N. 167.</sup>

2°. Puisque EG est parallele à AF, perpendiculaire sur AG, l'angle  $EGA = GAF = FEG$ , opposé\*; & par la même raison, l'angle  $AFE = EGA$ . <sup>\* N. 180.</sup>

Donc les quatre angles sont droits, étant tous égaux, & l'angle GAF, droit.

3°. Comme les Triangles ACB, ACD sont isocèles \*, l'angle  $EAG = EAF$ ; d'ailleurs l'angle droit  $AGE = AFE$ , & le côté AE ou EA est commun: ainsi les

## 162 VII. ENTRETIEN

deux Triangles AEG, AEF sont

\* N. égaux & semblables \* : donc AG.

133. \* N.  $AF :: AE. EA$  \* : or  $AE = EA$  :

150. donc  $AG = AF = EG = EF$ .

Donc & les angles & les côtés sont égaux : donc FG est un carré.

## PROPOSITION X.

Fig. 216. *Le carré d'une ligne double est quadruple.*

Je dis que AD, carré de AB, double de AC, est quadruple de AG, carré de AC, ou que  $AD = 4AG$ .

1°. CI & HF sont deux car-

\* N. rés sur la diagonale BE \*.

215. 2°. Le carré  $CI = AG$ , puisque le côté  $BC = AC$ , par l'hypothèse.

3°. Le carré  $AG = HF$ , le côté GH étant commun.

Enfin,  $GD = AG$ ; car la diagonale BE fait les Parallelogrammes qu'elle ne coupe pas, égaux \*.

191.

SUR LA GÉOMÉTRIE. 163  
Donc  $AD = 4AG$ .

217. EUDOXE. En un mot ,  
soit  $AC = 1x$ , &  $AB = 2x$  :

$$2x \times 2x = 4x^2 (a) ; 1x \times 1x = 1x^2 : \text{or } 4x^2. 1x^2 :: 4. 1.$$

*Mais s'il faut inscrire le quarré  
dans un cercle .....*

ARISTE. Ayant tiré par le cen- Fig.  
156.  
tre E deux diamètres perpendicu-  
laires l'un sur l'autre, je mene par  
leurs extrémités A, C, B, D, des  
lignes droites; & la figure ACBD  
est le quarré inscrit.

Car 1°. Chaque point de la per-  
pendiculaire CD qui passe par le  
centre E, étant également éloi-  
gné des extrémités opposées A,  
B du diamètre qu'elle coupe\*, \*N.23.  
les quatre côtés AC, CB, BD,  
DA sont égaux.

2°. Tous les angles de la figure  
ACBD sont droits, puisqu'ils sont  
appuyés chacun sur la demi - cir-  
conférence\*. \* N.  
II. 51.

(a) Calcul Littéral, N. 30.

Q ij

164 VII. ENTRETIEN.

Donc ACBD est le quarré inf-

\* N. crit \*.

173. 218. De-là, pour circonscrire

Fig. un cercle au quarré ACBD:

156.

1<sup>o</sup>. Tirez deux diagonales AB,

CD: ellès se couperont perpen-  
diculairement par le milieu: car  
les deux extrémités A, B étant  
également éloignées des deux  
points opposés C, D, les lignes  
AB, CD seront perpendiculai-

\*N.25. res\*, & par conséquent le point  
de section E également distant des

\*N.30. points A, B, C, D\*.

2<sup>o</sup>. Prenant pour rayon la moi-  
tié EB d'une diagonale, décrivez  
un cercle: passant par un angle,  
il passera par les quatre; & ce

\* N. fera le cercle circonscrit\*.

173.

Fig. 219. EUDOXE. Mais s'il faut

157. inscrire un cercle dans le quarré  
EFGH.....

ARISTE. Un cercle appuyé sur  
le milieu de chacun des côtés  
d'un quarré, est inscrit:

Cela posé, 1°. Ayant coupé par le milieu chacun des côtés du quarré, je tire de deux points de section I, L, aux deux opposés K, M, deux perpendiculaires IK, LM qui se coupent en un point N, & qui sont paralleles aux côtés\*.

\*N.41.

2°. De ce point, prenant pour rayon la moitié NK d'une des perpendiculaires, je décris un cercle LIMK; & c'est le cercle inscrit.

Car 1°. Les moitiés FL, LE, EK, &c. des quatre côtés égaux, sont égales: 2°. Les perpendiculaires entre paralleles sont égales\*.

\*N.40.

Ainsi  $NI = MG$ ;  $NM = KH$ ;  $NK = MH$ ;  $NL = KE$ ; & par conséquent,  $NI = NM = NK = NL$ .

Donc le cercle passant par les extrémités I, M, K, L, est appuyé sur le milieu des quatre côtés: donc c'est le cercle qu'il falloit inscrire.

Fig. 220. EUDOXE. Maintenant ;  
 156. c'est un quarré qu'il faut circonscrire  
 au cercle IMKL.

ARISTE. Par les extrémités I ;  
 M, K, L de deux diamètres per-  
 pendiculaires l'un sur l'autre, je  
 tire quatre Tangentes FG, GH,  
 HE, EF, & c'est le quarré.

Je dis donc que FH est un  
 quarré circonscrit.

1°. FE & GH perpendiculai-  
 res sur LM sont paralleles, & par  
 la même raison, FG & EH le  
 \*N.44. sont \*.

2°. FE = IK = GH entre mê-  
 \*N.40. mes paralleles \* ; par la même rai-  
 son FG = LM = EH.

Or IK = LM, diamètre du  
 \*N.18. même cercle \*.

Donc le côté FE = GH =  
 FG = EH.

3°. Puisque les quatre côtés  
 sont perpendiculaires, les quatre  
 angles F, G, H, E sont droits.

Donc FH est un quarré.

Enfin, ce quarré touche le cercle, puisqu'il est formé de quatre Tangentes; il le touche, dis-je, par le milieu de ses côtés: car les rayons de même cercle sont égaux \* & les perpendiculaires \**N.18.* entre mêmes paralleles sont égales \*.

Ainsi  $FL = IN = NK = LE$ ; par la même raison  $EK = KH$ , &c. Et si vous le voulez, Eudoxe, nous ferons une autre fois une sorte de mélange des rectangles & des quarrés.

*EUDOXE.* Dès demain..



## VIII. ENTRETEN.

*Sur les Rectangles & les Quarrés comparés ensemble.*

ARISTE. Vous en serez quitte, Eudoxe, pour quelques Propositions, mais qui demandent de l'attention.

EUDOXE. L'attention me coûte peu quand il s'agit d'appercevoir des vérités que l'on ne sauroit vous disputer.

ARISTE. Commençons:

### PROPOSITION I.

Fig. 258. 221. Si l'on coupe une ligne droite AB par le milieu C, & qu'on y ajoute une ligne droite BD, en sorte que les deux fassent une ligne droite AD; le rectangle AI fait de la toute AD & de l'ajoutée BD, avec le quarré de la moitié CB de la première



SUR LA GÉOMÉTRIE. 169  
*miere* AB coupée par le milieu C,  
 vaut le quarré fait de l'ajoutée BD  
 & de la moitié CB de la première  
 AB.

Soient BG parallele à DE; IK  
 + KL parallele à DC + CA; DF  
 diagonale du quarré CE coupant  
 les paralleles en H: donc BI &  
 KG, parallelogrames sur la dia-  
 gonale, sont deux quarrés\*; & <sup>\* N.</sup>  
 KG est quarré de KH ou de CB <sup>215.</sup>  
 = KH comprise entre mêmes pa-  
 ralleles. Enfin HE & CH sont  
 égaux n'étant pas coupé par la dia-  
 gonale\*; & CH = AK de même <sup>\* N.</sup>  
 base & de même hauteur par la <sup>191.</sup>  
 construction\*: donc HE = AK. <sup>\* N.</sup> <sup>186.</sup>

Cela posé; je dis que AI +  
 KG = CE.

AI + KG = CI + KG + HE;  
 ou AK = HE: or CI + KG +  
 HE = CE:

Donc AI + KG = CE.

PROPOSITION II.

222. Si l'on coupe une ligne BC <sup>Fig.</sup> <sup>159.</sup>

Tome II.

P

## 170 VIII. ENTRETIEN

*également en D, & inégalement en E; le rectangle fait des parties inégales BE, EC, avec le quarré de la partie DE du milieu, vaut le quarré DG de la moitié DC de la ligne BC.*

Soient HM + MI parallele à BD + DC; NE parallele à LD; LC diagonale.

1°. MN, EI sont deux quar-

\* N. rés \*.

215. 2°. MN quarré de MF = DE, l'est de DE.

3°. BF est le rectangle de BE par EC = CI = EF.

Cela posé; je dis que BF + MN = DG.

1°. BM = DI, ayant même

\* N. base & même hauteur \*.

186. 2°. DF = FG\*, puisque la dia-

\* N. 191. gonale ne les traverse pas.

Donc BM + DF, ou BF = DI + FG:

Donc BF + MN = DI + FG + MN.

Or  $DI + FG + MN = DG$  :

Donc  $BF + MN = DG$ .

223. De-là, si l'on divise une ligne BC en parties égales, & en parties inégales, le rectangle des parties inégales BE, EC vaut le quarré de la moitié de la ligne divisée, moins le quarré du segment du milieu.

### PROPOSITION III.

224. Si l'on divise une ligne en deux, le quarré de la toute vaut les deux quarrés des deux parties, plus deux fois le rectangle d'une partie par l'autre.

Divisons BC en deux au point D. Fig.  
160.

Je dis que  $BC^2 = BD^2 + DC^2 + 2BD \times DC$ .

Soit  $BD = r$  ; &  $DC = x$  :  
donc  $BC = r + x$  : donc  $BC^2 = r^2 + 2rx + x^2$ , ou  $r^2 + x^2 + 2rx$  (a).

(a) Calcul Littéral, N. 35.

Pij

## 172 VIII. ENTRETIEN

Mais  $r^2 = BD^2$ ,  $x^2 = DC^2$ ;  
 $2rx = 2BD \times DC$  : donc  $BC^2$   
 $= BD^2 + DC^2 + 2BD \times DC$ .

## PROPOSITION IV.

225. Enfin, si l'on divise une ligne en trois, le quarré de la toute vaut les trois quarrés des parties, plus deux fois le rectangle de la première par la seconde; plus deux fois le rectangle de la première par la troisième; plus deux fois le rectangle de la seconde par la troisième.

Fig. 161. Divisons BC en trois aux points D, E.

Je dis que  $BC^2 = BD^2 + DE^2 + EC^2 + 2BD \times DE + 2BD \times EC + 2DE \times EC$ .

Soit  $BD = r$

$DE = x$

$EC = y$ .

Donc  $BC = r + x + y$  : donc  
 $BC^2 = r + x + y \times r + x + y$ .

Voyons quel est ce produit...

$$\overbrace{r+x+y} \times \overbrace{r+x+y} = \left. \begin{array}{l} (r^2+rx+ry) \\ (rx+x^2+xy) \\ (ry+xy+y^2) \end{array} \right\} = r^2 + x^2 + y^2 + 2rx + 2ry + 2xy^*.$$

\*N.28.

Et  $r^2 = BD^2$ ,  $x^2 = DE^2$ ,  $y^2 = EC^2$ ,  $2rx = 2BD \times DE$ ,  $2ry = 2BD \times EC$ ,  $2xy = 2DE \times EC$ .

Donc  $BC^2 = BD^2 + DE^2 + EC^2 + 2BD \times DE + 2BD \times EC + 2DE \times EC$ .

*EUDOXE.* Voyons votre opération . . . . elle est juste.

*ARISTE.* Les Poligones seront la matière d'un plus long entretien.

*EUDOXE.* Ils me dédommageront.

## IX. ENTRETIEN.

*Sur les Poligones.*

*EUDOXE.* **I**L est question, ce me semble, de Poligones.

*ARISTE.* Oui.

*EUDOXE.* Le terme de Poligone est un peu équivoque; il pourroit convenir au Triangle, au Quadrilatere, dont nous avons parlé.

226. *ARISTE.* Il est vrai: mais jefixe la signification du terme en disant que j'entens par Poligone une figure plane de plus de quatre côtés.

227. La figure plane a-t-elle 5 côtés? C'est Pentagone; 6? Exagone; 7? Eptagone; 8? Octogone; 9? Ennéagone; 10? Décagone; 11? Ondécagone; 12? Dodécagone; 1000? Chiliogone, &c.

228. Et le Poligone est régulier, si tous ses côtés aussi-bien que ses angles, sont égaux.

229. Le Poligone régulier est inscrit dans un cercle lorsque tous les angles sont dans la circonférence; & circonscrit, quand tous les côtés la touchent.

230. Angle du Poligone inscrit, ou circonscrit, est un angle formé par deux de ses côtés.

231. Périmetre est le circuit de la figure.

232. Apothème, ou rayon droit <sup>Fig. 162.</sup> AB est la perpendiculaire AB comprise entre le milieu B du côté DE d'un Poligone inscrit, & le centre A du cercle.

L'aire ou la surface d'un Poligone est l'espace terminé par ses côtés.

233. Enfin deux Poligones sont semblables quand leurs angles sont égaux chacun à chacun, & les côtés, qui comprennent ces angles, proportionnels.

EUDOXE. Je prévois bien des Problèmes.

ARISTE. Quelques Propositions nous aideront à les résoudre.

# PROPOSITION I.

234. Le Poligone peut se reduire <sup>Fig. 163.</sup>  
P iiij

# 176 IX. ENTRETIEN.

*en autant de Triangles qu'il a de côtés.*

Du point A pris à volonté dans le pentagone X, tirez cinq lignes droites aux cinq angles B, C, D, E, F, faits par les cinq côtés : voilà le Pentagone réduit en cinq Triangles. Six lignes tirées de même réduiroient l'Exagone en six Triangles, &c.

## PROPOSITION II.

235. *Les angles du Poligone, pris ensemble, valent autant de fois deux angles droits, qu'il a de côtés, moins quatre angles droits.*

Fig.  
163.

Soit le Poligone X :

Les Triangles dans lesquels il se réduit, valent, pris ensemble, autant de fois deux droits qu'il a de côtés, puisque ces Triangles sont aussi nombreux que les côtés du Poligone \*, & que chaque

\* N.  
234.

\* N.  
122.

Triangle vaut deux droits \*. Or les angles du Poligone, pris ensemble, valent ceux de tous ces



Triangles, hors leurs angles au centre A, qui valent quatre droits\*, ayant pris ensemble, le <sup>N. 94.</sup> cercle S pour mesure.

De-là, si dans un Poligone, <sup>Fig.</sup> on tire des lignes d'angle à angle, <sup>164.</sup> on le divise en autant de Triangles qu'il a de côtés, moins deux.

Les lignes AB, AD, DC réduisent l'Exagone ACEDBF en quatre Triangles.

### PROPOSITION III.

236. *Un cercle qui passe par un <sup>Fig.</sup> des sommets d'un Poligone régulier, <sup>165.</sup> passe par les autres sommets.*

Soit le Poligone régulier X; je dis que le cercle qui passe par A, passe par B, par C, &c.

1°. Tirez les perpendiculaires DE, FE, sur le milieu D, ou F des côtés AB, BC: les angles ADE, BDE, étant droits, & compris entre côtés égaux, les Triangles AED, DEB sont

# 178 IX. ENTRETIEN

\* N. égaux \*, donc  $BE = AE$ .

136. Donc le cercle décrit du centre

\*N.17. E par A passera par B\*.

2°. Par la même raison, il passera par C, &c.

Ainsi, tout Poligone régulier peut s'inscrire dans un cercle.

## PROPOSITION IV.

Fig. 237. *Le côté AB d'un Exagone régulier inscrit est une corde de 60 degrés.*  
166.

Ce côté soutient la sixième partie du cercle, ou un arc de 60 degrés, sixième partie de 360, va-  
\*N.50. leur du cercle \*: donc c'est une corde de 60 degrés.

## PROPOSITION V.

Fig. 238. *Le rayon AC du cercle est égal au côté AB de l'Exagone inscrit.*  
166.

1°. Les angles BAC, ABC opposés aux côtés ou rayons égaux

\* N. AC, BC sont égaux \*.

125. 2°. L'angle au centre C est de

SUR LA GÉOMÉTRIE. 179  
60 degrés, comme l'arc AB qui  
en est la mesure \*. \* N. 93.

Donc les 2 angles BAC, ABC  
valant ensemble 120 degrés, sont  
aussi de 60 degrés chacun, puis-  
qu'ils sont égaux.

Donc le Triangle est équilate-  
ral \*; & par conséquent  $AC=AB$ . \* N.

339. EUDOXE. Mais il s'agit <sup>125.</sup>  
enfin d'inscrire des Poligones au  
cercle.

### PROBLÈME I.

239. *Inscrire un Exagone régulier.* Fig.

ARISTE. 1°. Avec une ouver- <sup>167.</sup>  
ture de compas égale au rayon  
AC, je divise le cercle en 6 arcs  
AB, BE, EF, FG, GH, HA.

2°. Je tire autant de cordes.

Et c'est l'Exagone inscrit, puis-  
que chacune des six cordes est  
côté de 60 degrés \*. \* N.

De-là, joignez deux côtés FG, <sup>237.</sup>  
GH par une ligne droite FH:  
c'est un Triangle isocèle inscrit \*. \* N.  
127.

180 IX. ENTRETIEN

Joignez tous les côtés deux à deux : c'est un Triangle équilatéral BFH.

PROBLÈME II.

Fig. 240. EUDOXE. *Inscrire un Do-*  
168. *décagone.*

ARISTE. 1°. Du centre D, je tire une perpendiculaire DE, qui coupant par le milieu la corde ou le côté FG de l'Exagone inscrit  $\alpha$ , coupe l'arc FEG en deux arcs égaux, ou de 30 degrés \*.

2°. Je mene la corde FE de 30 degrés; & c'est le côté du Dodécagone, puisque 12 côtés de la sorte soutiennent le cercle entier.

Divisez de même le côté du Quarré inscrit: vous aurez de même le côté de l'Octogone.

De-là, divisant un arc par la moitié, ou le doublant, on a divers Poligones inscrits.

## PROBLÈME III.

241. EUDOXE. *Inscrire un Décagone.*

ARISTE. La médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raison , étant corde de 36 degrés \* est le côté du Décagone : <sup>\* N,</sup>  
car  $36 \times 10 = 360$ . <sup>164.</sup>

Cela posé : ayant divisé le rayon en moyenne & extrême raison \*, <sup>\* N,</sup>  
je prens la médiane , ou la plus <sup>162.</sup>  
grande partie ; & c'est le côté du  
Décagone.

## \* PROBLÈME IV.

242. EUDOXE. *Inscrire un Pentagone.*

ARISTE. Je double l'arc du Décagone ; & la corde de l'arc double soutenant un arc de 72 degrés \*, c'est le côté du Pentagone <sup>\* N,</sup>  
ne , puisque  $5 \times 72 = 360$ . <sup>241.</sup>

## PROBLÈME V.

Fig. 243. EUDOXE. *Inscrire un*  
 169. *Quindécagone, ou Poligone regulier*  
*de 15 côtés.*

ARISTE. 1°. J'inscris un Trian-  
 \* N. gle équilatéral ABC \*. Les arcs  
 239. AB, BC, CA sont égaux, puis-  
 qu'ils sont soutenus par cordes  
 \* N 57. égales \*: donc l'arc AB, troisiè-  
 me partie du cercle, contient  
 cinq parties du cercle divisé en 15.

2°. J'inscris au même cercle un  
 Pentagone régulier AEF GHA,  
 ayant un angle en A; les cinq  
 arcs AE, EF, FG, GH, HA,  
 soutenus par cordes égales sont  
 \* N. 57. égaux \*: donc AE, cinquième  
 partie du cercle divisé en 15, en  
 contient 3.

3°. Puisque AB en contient 5;  
 & AE 3; EB, reste de l'arc AB,  
 en contient 2.

Donc si l'on divise l'arc EB par  
 le milieu I, l'arc EI sera la quinzième

SUR LA GÉOMÉTRIE. 183  
me partie du cercle : donc la corde EI sera côté du Quindécagone ; & portée 15 fois sur le cercle, elle donnera le Poligone entier.

De-là, le côté BF du Poligone de 15 côtés est une corde comprise entre la base BC du Triangle équilatéral, & la base FG du Pentagone inscrit au même cercle : car, puisque les cordes EI, IB, BF sont trois côtés, & que EI & IB en sont deux, il faut que BF en soit un.

#### PROBLÈME VI.

244. EUDOXE. *Circonscrire au* Fig.  
170.  
*cercle un Poligone régulier.*

ARISTE. 1°. J'inscris un Poligone régulier ABCDEA semblable à celui que je veux circonscrire.

2°. Je mene des Tangentes par les sommets A, B, C, D, E ; & c'est le Poligone circonscrit.

Car tirez les perpendiculaires GH, GI, &c. sur les côtés AE,

184 IX. ENTRETEN

ED, &c. du Poligone inscrit; & 5  
les perpendiculaires GA, GE,  
sur les côtés LH, HI du Poligo-  
ne extérieur; ces perpendiculai-  
res couperont les côtés & les arcs

\*N.61. par le milieu\*.

58. 1°. Les angles AGH, HGE,  
EGI, sont égaux, ayant des Si-

\*N.93. nus & des arcs égaux\*.

2°. Les angles HAG, HEG,  
IEG, sont égaux aussi, étant droits  
ou formés par des Tangentes sur  
des rayons.

Donc les Triangles GAH,  
GHE, GEI, qui ont deux an-  
gles égaux sur côtés ou rayons

\*N. 61. égaux GA, GE, sont égaux\*.

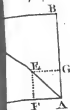
137. Donc  $AH = HE = EI$ . Donc  
les moitiés des côtés du Poligo-  
ne circonscrit sont égales: donc  
c'est un Poligone régulier cir-  
conscrit.

PROBLÈME VII.

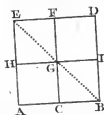
Fig. 245. EUDOXE. Circonscrire un  
171. cercle.



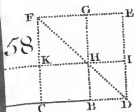
54



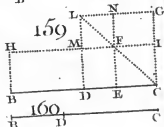
155



58



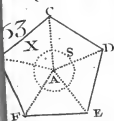
159



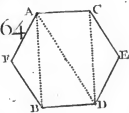
160



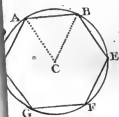
63



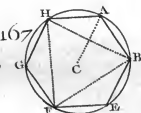
164



161



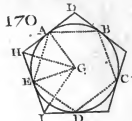
167



69



170





SUR LA GÉOMÉTRIE. 185  
*cercle à un Poligone régulier.*

ARISTE. 1°. Je divise deux des côtés BC, CD par le milieu E, F, & tire les perpendiculaires EG, FG, qui me donnent le centre G\*.

\*N.62.

2°. Du centre G, intervalle GC, je décris un cercle qui passera par B, C, D, &c. sommets du Poligone.

Car 1°. Les côtés CE, CF, des Triangles EGC, FGC, sont égaux, par la construction; le côté CG est commun, & l'angle E = F puisqu'ils sont, tous les deux, droits, par la construction: donc le Triangle EGC = FGC: donc la perpendiculaire EG = FG.

2°. Les éloignemens du perpendicule EB, EC, FD, &c. sont égaux de même, par la construction; ainsi, les obliques GC, GB, GD, &c. sont égales\*.

\*N.36.

Donc le cercle qui passe par C, passe aussi par B, D, &c.

Tome II.

Q

186 IX. ENTRETIEN

De-là , coupant les côtés d'un Poligone régulier par le milieu , & prenant pour rayon une ligne tirée du centre à l'angle de la figure , on circonscrira le cercle.

PROBLÈME VIII.

Fig. 246. EUDOXE. *Inscrire un cer-*  
 172. *cle dans un Poligone régulier.*

ARISTE. 1°. Je divise perpendiculairement les côtés BC , CD , &c. par le milieu E , F ; & j'ai le  
 \*N.68. centre G \*.

2°. Du centre G , intervalle GE , je décris un cercle ; & je dis que c'est le cercle inscrit , ou appuyé sur tous les côtés du Poligone , par exemple , sur F , comme sur E.

GF = GE , les apothèmes d'un Poligone régulier étant égaux , puisque ses côtés qui sont cordes d'un cercle circonscrit , sont également éloignés du centre \* : donc  
 \*N.64. le cercle passant par E passe par F.

D'ailleurs , soit tirée CG ; on

SUR LA GÉOMÉTRIE. 187  
 aura dans les Triangles EGC,  
 FGC le côté  $CE=CF$  par la con-  
 struction ; le côté CG commun,  
 & l'angle  $E=F$  puisqu'ils sont  
 tous les deux droits par la construc-  
 tion : donc  $GF=GE$  : donc le cer-  
 cle qui touche en E, touche en F.

EUDOXE. Mais enfin , quelle  
 est la valeur de l'aire ou de la sur-  
 face d'un Poligone régulier inf-  
 crit ou circonscrit ?

ARISTE. Une Proposition va  
 nous dire ce qui en est.

PROPOSITION VI.

247. L'aire,  $x$ , d'un Poligone ré- Fig.  
 gulier vaut un Triangle,  $z$ , qui a pour <sup>173.</sup>  
 base le circuit, & pour hauteur l'A-  
 pothème BD du Poligone.

Soient 1°.  $x$  réduite en Trian-  
 gles \* de même base & de même \* N.  
 hauteur, puisque par la construc- <sup>234.</sup>  
 tion le côté  $AC=CE=EF=$   
 $FG=GH=HA$ , & que l'apo-  
 thème  $BI=BD$ , &c. \* les cordes \* N. 64.  
 égales AC, CE, &c. étant égale-

Q ij

188 IX. ENTRETEN

ment éloignées du centre B ; 2°. La base  $KL = AC + CE + EF$ , &c. 3°. La hauteur  $KM = BD$ .

Je dis que  $x = z$ .

La surface  $x$  vaut tous les Triangles dans lesquels on la réduite ; & ces Triangles , pris ensemble , valent  $z$  , qui a base égale & éga-

\* N. le hauteur \*.

188. Donc  $x = z$ .

Fig. 248. De-là , 1°. La surface  
173. d'un Poligone régulier vaut la moitié du rectangle KP qui a pour base le circuit & pour hauteur l'apothème du Poligone , puisqu'el-

\* N. le vaut un Triangle  $z$  \* , qui est la  
247. moitié de ce rectangle \*.

\* N.  
187. 249. 2°. La même surface vaut un rectangle OK , qui a pour base la moitié KN du circuit  $= KL$  , & pour hauteur l'apothème KM : car elle vaut le Triangle  $z$  , qui étant moitié du rectangle KP , vaut le rectangle OK , moitié de KP.

Enfin , après avoir parlé des

Poligones en général & en particulier ; voulez - vous , Eudoxe , que nous les comparions pour nous rappeler les propriétés si utiles des Poligones semblables ; ou bien , irons-nous prendre l'air & voir éclore les Tulipes , les Œillets , les Roses ?

*EUDOXE.* Les fleurs réveilleront des idées moins claires , mais un peu plus gayer.

## X. ENTRETIEN.

*Sur les Poligones semblables.*

*EUDOXE.* **L** Es fleurs , Ariste , ne m'ont pas fait oublier les Poligones ; & des idées gayer , mais obscures , n'ont point effacé des idées seches , mais claires , que je préfere aux autres.

*ARISTE.* Cela m'engage à continuer de m'expliquer en Proposi-

190 X. ENTRETIEN.

tions suivies , pour m'expliquer plus nettement.

PROPOSITION I.

250. Deux Poligones réguliers  
 Fig. de même nom sont semblables.  
 174.

Soient deux Pentagones réguliers R , S.

De même nom, ou Pentagones , ils ont même nombre d'angles & de côtés \* ; réguliers , ils  
 227. ont , les angles égaux , chacun ,  
 \* N. & les côtés \*.

228. Et je dis que R & S sont semblables.

1°. Les angles de R sont égaux à ceux de S : car les angles égaux de R sont aussi nombreux que les angles égaux de S ; & le nombre des côtés étant égal , les angles de part & d'autre valent même nombre de droits \*.

235. 2°. Les côtés de R sont proportionnels aux côtés de S , puisque côtés égaux entre eux , ont même



raison à côtés égaux entre eux.

Donc R & S sont semblables.

D'ailleurs, les arcs soutenus par les côtés égaux de R sont semblables aux arcs égaux correspondants de S\*.

\* N. 51.

Cela posé; je dis que l'angle  $ABC = DEF$ , & que le côté  $AB. DE :: BC. EF$ .

1°. L'angle ABC & l'angle DEF sont inscrits & appuyés sur arcs semblables AGHC, DIKF: donc l'angle  $ABC = DEF$  \*.

\* N.

2°. Le côté  $AB = BC$ , & le côté  $DE = EF$ : donc  $AB. BC :: DE. EF$ : donc  $AB. DE :: BC. EF$  (a).

## PROPOSITION II.

251. Les circuits ou périmètres de deux Poligones semblables réguliers, ou non, sont entre eux comme le côté de l'un au côté homologue ou semblable de l'autre. Figi. 174.

1°. Soient deux Poligones sem-

(a) Calcul Numérique, N. 144.

192 X. ENTRETIEN

blables réguliers, deux Pentagones, dont le périmètre du premier soit R, & celui du second, S; deux côtés homologues, ou semblables DE, AB: je dis que  $R.S :: DE.AB$ .

Les tous sont comme les parties semblables (a) : donc  $R. S :: DE. AB$ .

Aussi,  $R = 5 DE$ ,  $S = 5 AB$  : or  $5 DE. 5 AB :: DE. AB$ , les produits par même multiplicateur étant comme les grandeurs multipliées (b) : donc  $R. S :: DE. AB$ .

Fig. 2°. Soient deux Poligones semblables & réguliers A B C D E ,  
175. F G H I K , ou  $x$  &  $z$  ; deux côtés semblables AB, FG.

Je dis que  $x. z :: AB. FG$ .

Les tous sont comme les parties semblables : donc  $x. z :: AB. FG$ .

Aussi, BC. GH :: CD. HI ::  
\* N. DE. IK :: EA. KF :: AB. FG \*  
233.

(a) Calcul Numérique, N. 99.

(b) Ibid. N. 149.

SUR LA GÉOMÉTRIE. 193  
par la définition des Poligones  
semblables. \*

Donc tous les côtés de  $x$  sont  
aux côtés homologues de  $z$ , com-  
me AB est à FG :

Donc  $x. z :: AB. FG$  \*. \*N. 6.

### PROPOSITION III.

252. Deux Poligones réguliers & Fig.  
semblables se réduisent en Triangles 176.  
semblables.

Soient les Pentagones réguliers  
& semblables R, S, inscrits.

Tirant des lignes du centre aux  
angles, on réduit les polignes en  
autant de Triangles qu'ils ont de  
côtés \* ; & ces Triangles sont \* N.  
semblables. 234.

Je dis donc que les Triangles  
CDR & ABS sont semblables.

1°. Les angles au centre CRD ;  
ASB sont égaux \* puisqu'ils ont \*N. 93.  
pour mesure des arcs semblables,  
CD, AB \*, qui sont, chacun, \*N. 51.  
la cinquième partie de leur cercle.

Tome II.

R

194 X. ENTRETEN

2°. Les angles à la base C, D ;  
A, B, sont égaux aussi : car les  
Triangles sont isocèles , puisque  
le rayon  $CR = RD$ , & le rayon  
 $AS = BS$  ; & par conséquent , les  
angles aux sommets R, S , étant  
égaux , les angles à la base le  
\* N. sont \*.

133. Donc les Triangles CDR &  
ABS , ayant tous leurs angles  
égaux , chacun à chacun , sont  
\* N. semblables \*.

130.

PROPOSITION IV.

Fig. 253. Les circuits  $x, z$  de deux  
176. Polygones réguliers & semblables  
sont comme les rayons.

Je dis que le circuit  $x. z :: CR. AS$ .

\* N.  $x. z :: CD. AB$  \* : or puisque  
251. les Triangles CDR, ABS sont  
\* N. semblables \* ,  $CD. AB :: CR.$

252.  $AS$  ; car dans ces Triangles , les  
côtés homologues sont propor-  
\* N. tionnels \* :  
150.

Donc  $x. z :: CR. AS$ .

254. De-là, 1°. Les circuits de deux polygones réguliers & semblables sont comme leurs diamètres, étant comme les demi-diamètres, ou les rayons.

2°. Ces circuits  $x, z$ , sont comme les apothèmes ou rayons  $RF, SE$  :

Car les Triangles  $CRF, ASE$ , sont semblables, puisque les angles  $C, A$  sont égaux\*, & les angles  $F, E$ , droits, l'apothème  $RF$ , ou  $SE$  étant perpendiculaire\*. \* N.  
252.

Cela supposé ; les rayons  $CR, AS$ , sont comme les apothèmes  $RF, SE$ \* ; or les circuits  $x, z$ , sont comme les rayons  $CR, AS$  : \* N.  
232.  
150. donc les circuits sont comme les apothèmes.

Si les polygones  $x, z$ , étoient circonscrits, on trouveroit de même la même chose.

## PROPOSITION V.

255. Deux Poligonés réguliers & semblables, inscrits ou circonscrits sont en raison doublée de celles de leurs côtés homologues, ou comme les quarrés de ces côtés.

Ces Poligonés sont comme les Triangles semblables dans lesquels ils se résolvent\*. Or ces  
 \* N. 252. Triangles sont en raison doublée de celles de leurs côtés homologues, ou comme les quarrés de ces côtés\*.

\* N. 297. De là, les Poligonés réguliers & semblables sont comme les quarrés des rayons, côtés de ces Triangles.

EUDOXE. Ainsi, doublant la raison des côtés ou des rayons, l'on aura dans la raison des produits des antécédens & du produit des conséquens, la raison des Poligonés. Si les exposans de la raison de deux côtés semblables sont 1, 2 ;

doublez 1, 2, vous avez 1, 2;  
1, 2 : puis multipliez 1 par 1, 2  
par 2 : vous aurez dans les quarrés  
1, 4 la raison des deux Poligones ;  
c'est-à-dire , que l'un est à l'autre  
comme 1 à 4.

256. Mais les Poligones sem-<sup>Fig:</sup>  
blables irréguliers A B C D E ,<sup>177.</sup>  
F G H I K . . . .

*ARISTE.* Ces Poligones , aussi-  
bien que les réguliers , se rédui-  
sent en Triangles semblables.

Car 1°. Les Triangles A B E ,  
F G K sont semblables\* , puisque \* N.  
par l'hypothèse , l'angle  $A = F$  ,<sup>160.</sup>  
& les côtés A E , A B , & F K ,  
F G , qui comprennent l'angle  
égal , sont proportionnels.

2°. Les Triangles D C E , I H K  
sont semblables aussi par la même  
raison.

3°. Les Triangles B E C , G K H ,  
le sont : car l'angle  $A B C = F G H$  ,  
& l'angle  $A B E = F G K$  : donc  
l'angle  $E B C = K G H$  , les restes

198 X. ENTRETIEN

étant égaux lorsque de choses égales on ôte choses égales :

De même l'angle  $BCD = GHI$ , & l'angle  $ECD = KHI$  : donc l'angle  $BCE = GHK$ .

257. Ainsi, tous les Poligones semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues, puisqu'ils se réduisent tous en Triangles semblables qui sont

\* N. comme les quarrés de leurs côtés \*.  
197.

PROPOSITION VI..

258. Si l'on fait sur les trois côtés d'un Triangle rectangle trois Poligones semblables, le Poligone construit sur l'hypoténuse est égal aux deux autres.

Ces Poligones sont comme les  
\* N. quarrés de leurs côtés \*, qui sont  
257. côtés du Triangle : or le quarré de l'hypoténuse est égal aux quarrés des deux autres côtés \* : donc  
204. le Poligone construit sur l'hypoténuse est égal aux deux autres.



## PROPOSITION VII.

259. Enfin, si trois lignes sont en proportion continue, le Poligone construit sur la première, est au Poligone fait sur la seconde, comme la première à la troisième.

Le quarré de la première est au quarré de la seconde, comme la première à la troisième (a).

Or les Poligones sont comme les quarrés de leurs côtés proportionnels\* : donc le Poligone sur la première est au Poligone sur la seconde, comme la première à la troisième. \* N. 254.

260. EUDOXE. J'apperçois ; ce semble, le cercle qui s'approche à la suite des Poligones : mais avant qu'il soit question du cercle, il faut mesurer un Poligone rectiligne quelconque.

ARISTE. Hé bien, 1°. Je le ré-

(a) Calcul Littéral, N. 148.

R iiij

\* N. duis en Triangles\*.

234. 2°. Du sommet de chaque Triangle j'abaisse une perpendiculaire sur sa base\* :

3°. Multipliant séparément la base de chaque Triangle par la moitié de la perpendiculaire ou de la hauteur, j'ai les surfaces des

\* N. Triangles\*.

189. Enfin, ajoutant ces surfaces, j'ai dans la somme la valeur du \* N. 6. Poligone\*, puisque le tout, ou ses parties prises ensemble, sont même chose.

Après cela, le cercle vient à propos.

EUDOXE. Pour être le sujet d'un Entretien.



---

## XI. ENTRETIEN.

*Sur les Cercles en particulier.*

**EUDOXE.** IL s'agit donc du cercle ; nous ne l'avons point perdu de vûë , & je vous laisserai tout le loisir de nous rappeler les propriétés des cercles les plus intéressantes.

**ARISTE.** Il se trouve , pour ainsi dire , entre le Poligone inscrit & le Poligone circonscrit ; & quelques Propositions nous y conduiront bientôt.

### PROPOSITION I.

261. *Si l'on inscrit dans un cer- Fig.  
cle deux Poligones réguliers ,  $x$  ,  $z$  , <sup>178</sup>  
celui qui a plus de côtes a plus de  
circuit.*

Soit  $x$  , Décagone ;  $z$  , Pentagone : je dis que le circuit ou le

## 202 XI. ENTRETIEN

perimètre de  $x$  est plus grand que celui de  $z$ .

La ligne courbe ABC, cinquième partie du circuit de  $x$ , est plus grande que la droite AC cinquième partie de  $z$  \* : donc le circuit de  $x$  est plus grand.

Par le même principe, le Polygone inscrit  $x$ , qui a plus de côtés, a plus de surface : car le segment ABCD est la 5<sup>e</sup>. partie de  $x$ , comme ACD est la 5<sup>e</sup>. de  $z$  : or ABCD  $\triangleright$  ACD de la valeur du Triangle ACB.

### PROPOSITION II.

*Fig. 262. De deux Polygones  $x$ ,  $z$ , circonscrits au cercle, celui qui a plus de côtés, a moins de circuit.*

Soit  $x$ , Décagone ;  $z$ , Pentagone : je dis que le circuit de  $x$  est plus petit que celui de  $z$ .

AB + BC est la cinquième partie de  $x$ , comme AB + BE + EC, est la cinquième de  $z$  : or AB

+ BC < AB + BE + EC, puis-  
que BC < BE + EC\*, & que le \*N. 15.  
reste AB est commun; donc le  
circuit de x est plus petit.

## PROPOSITION III.

263. *On peut regarder le cercle  
comme un Poligone régulier d'une  
infinité de côtés.*

Plus le Poligone régulier inscrit a de côtés, plus il est grand  
& approchant du cercle\*; & plus \* N.  
le Poligone circonscrit a de côtés, 261.  
plus il est petit & approchant du  
cercle\*: donc un Poligone régulier \* N.  
d'une infinité de côtés ap- 262.  
proche tellement du cercle qu'on  
ne peut en approcher davantage,  
ou n'en diffère pas: donc  
on peut regarder le cercle comme  
un Poligone régulier d'une infinité  
de côtés.

*EUDOXE.* Ainsi, la circonfé-  
rence du cercle sera formée de  
lignes droites.

204 XI. ENTRETIEN

ARISTE. Oui, mais infiniment petites ; & comme ces lignes sont infiniment petites , la différence des apothèmes & des rayons est infiniment petite.

PROPOSITION IV.

264. *Les cercles sont des Polygones semblables.*

Les cercles sont des Polygones réguliers de même nom , ou d'un  
 \* N. ne infinité de côtés \* : donc ce  
 263. sont des Polygones semblables\*.  
 \* N.

250. PROPOSITION V.

265. *Les circonférences de cercle sont comme les rayons , ou comme les diamètres.*

Les circonférences sont circuits de Polygones réguliers &  
 \* N. semblables\* : or ces circuits sont  
 264. \* N. comme les rayons \* ou comme  
 263. les diamètres, doubles des rayons.  
 De - là ;

## I.

266. Les arcs semblables sont comme les rayons.

Ces arcs sont comme les circonférences, les parties semblables étant comme les tous : or les circonférences sont comme les rayons\*.

\* N.  
265.

## I I.

267. Les cordes AB, CD, qui soutiennent des arcs semblables AIB, CND sont entre-elles, comme ces arcs. Fig.  
180.

Car 1°. Les Triangles AEB, CFD sont isocèles, ayant, chacun, deux côtés égaux, ou rayons du même cercle.

2°. Les angles au centre E, F sont égaux\*, puisqu'ils ont pour mesure arcs semblables : donc les angles A, B; C, D sur la base sont égaux\*; & par conséquent les Triangles AEB, CFD sont

# 206 XI. ENTRETIEN

- \* N. équiangles \* ; ainsi , les côtés  
 230. étant proportionnels , les cordes  
 AB, CD, sont comme les rayons  
 BE, DF : or les rayons sont com-  
 \* N.  
 266. me les arcs semblables \* : donc  
 les cordes sont de même.

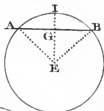
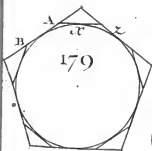
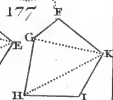
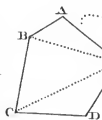
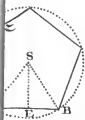
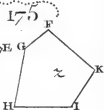
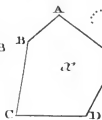
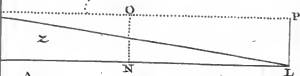
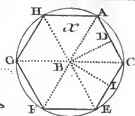
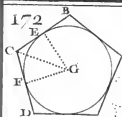
## III.

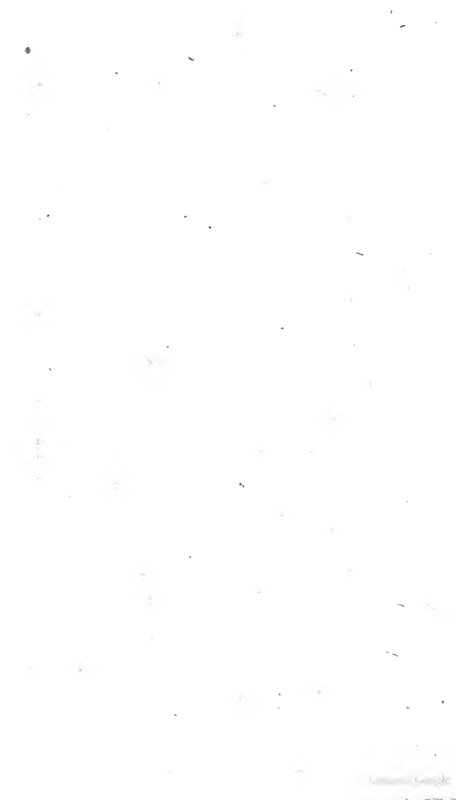
- Fig. 268. Les Sinus AG, CH, des  
 280. arcs semblables AI, CN, sont com-  
 \* me ces arcs.

Je dis que  $AG. CH :: AI. CN.$

- Les angles AEI, CFN sont  
 293. égaux \* , ayant pour mesures des  
 arcs semblables AI, CN ; & les  
 angles AGE, CHF sont droits ,  
 puisque les Sinus AG, CH, sont  
 perpendiculaires sur les rayons  
 EGI, FHN : donc les Triangles  
 \* N. EAG, FCH, sont semblables \* :  
 230. donc  $AG. CH :: AE. CF$  : or  
 \* N.  $AE. CF :: AI. CN$  \* , les rayons  
 266. étant comme les arcs : donc  $AG.$   
 $CH :: AI. CN.$







## IV.

269. Les Tangentes  $AB, CD$  <sup>Fig. 181.</sup>  
des arcs semblables  $AE, CF$ , sont  
comme ces arcs.

Je dis que  $AB. CD :: AE. CF$ .

Les angles au centre  $G, H$ ,  
sont égaux \*, puisqu'ils ont pour \*N. 93  
mesures des arcs semblables; &  
les angles  $BAG, DCH$  faits par  
les Tangentes sont droits \*: donc \*N. 79  
les Triangles  $AGB, CHD$  sont  
équianglés \*, & par conséquent \*N.  
ils ont leurs côtés proportion- 133.  
nels \*: donc  $AB. CD :: AG. CH$ : or  $AG. CH :: AE. CF$  \*: 150.  
donc  $AB. CD :: AE. CF$ . \*N. 266.

270. Par la même raison, les  
Sécantes  $BG, DH$  des arcs sem-  
blables  $AE, CF$ , sont comme  
ces arcs.

## V.

271. Néanmoins, dans le même <sup>Fig.</sup>  
cercle, ou dans les cercles égaux, les 182.

*cordes des arcs différents ne sont pas comme leurs arcs.*

Soient AB, corde de l'arc ACB, & AD, corde de l'arc ACBED, double de l'arc ACB.

Je dis que AD n'est point à AB, comme ACBED est à ACB.

ACBED = 2ACB : or on ne peut pas dire que  $AD = 2AB$ , ou \*N.15.  $AB + BD$ \*, puisque AD est ligne droite, &  $AB + BD$ , ligne courbe entre mêmes points A, D.

Ainsi les Sinus qui sont moitiés de cordes de ces arcs différents, ne sont pas comme les arcs dont ils sont Sinus.

## PROPOSITION VI.

272. *Les cercles sont comme les quarrés des rayons ou des circonferences.*

Les cercles sont des Poligones \* N. réguliers & semblables\* : or les 264. Poligones de cette espèce sont comme les quarrés des rayons ou  
de

de leurs côtés homologues, & par conséquent des circonférences composées de ces côtés.

## PROPOSITION VII.

273. *Un cercle qui a pour rayon l'hypoténuse d'un Triangle rectangle, vaut les deux cercles dont chacun a pour rayon l'un des côtés.*

Les cercles sont entre-eux comme les quarrés des rayons<sup>\*</sup> : or <sup>\* N.</sup>  
le quarré de l'hypoténuse vaut les <sup>272.</sup>  
quarrés des côtés<sup>\*</sup>. <sup>\* N.</sup>

De-là, 1°. Le cercle qui a pour <sup>204.</sup>  
diamètre l'hypoténuse, vaut les  
deux cercles, dont chacun a pour  
diamètre l'un des côtés.

274. Ainsi le demi-cercle <sup>Fig.</sup>  
AECL sur l'hypoténuse AC d'un <sup>183.</sup>  
Triangle rectangle, vaut les deux  
demi-cercles AFBI, BGCK,  
sur les côtés AB, BC.

2°. Les Lunules AFBH, BGCE,  
prises ensemble, sont égales au  
Triangle rectangle ABC.

210 XI. ENTRETEN.

Car les deux demi-cercles AFBI, BGCK, pris ensemble, & le demi-cercle AECL, sont  
 \* N. grandeurs égales \* : donc si l'on  
 274. ôte de ces trois grandeurs les segmens communs AHBI, BECK, les restes, c'est-à-dire, les Lunules AFBH, BGCE d'une part & le Triangle ABC de l'autre, seront égaux.

PROPOSITION VIII.

275. *L'aire du cercle entier est égale au Triangle rectangle qui a pour base la circonférence & pour hauteur le rayon du cercle.*

L'aire d'un Poligone régulier vaut un Triangle rectangle qui a pour base le circuit du Poligone, & pour hauteur l'apothème du Po-  
 \* N. ligone \* : or le cercle est un Poli-  
 247. gone régulier qui a pour apothème le rayon ; car dans le cercle la différence de l'apothème & du  
 \* N. rayon est infiniment petite \*.

263. EUDOXE. La Proposition se dé-

montre, ce semble, encore autrement.

*ARISTE.* Vous la démontrerez donc, Eudoxe.

*EUDOXE.* Volontiers. Traçons d'abord une figure . . . .

Soient les circonférences concentriques  $s, t, y, z$ , qui font l'aire  $X$  du cercle; le rayon  $AB$ ; les Tangentes  $BC = s, mn, op, qr$ , faisant des Triangles, qui ayant les angles  $B, m, o, q$ , droits, & l'angle  $A$  commun, sont semblables \*. Fig.  
184.

Je dis que  $X$  vaut le Triangle rectangle  $ABC$ . \* N.  
133.

1°.  $mn. BC :: Am. AB$ , à cause des Triangles semblables \*. \* N.

2°.  $t. s :: Am. AB^*$ , les circonférences étant comme les rayons. 150.  
\* N.  
265.

Donc  $mn. BC :: t. s$ , puisque deux raisons égales à une troisième, le font entr'elles (a).

(a) Calcul Littéral, N. 104.

S ij

\* N. 144. Donc  $mn.t :: BC.s$  \* en raison alterne.

Or  $BC = s$ , par l'hypothèse.

Donc  $mn = t$ .

Par la même raison,  $op = y$ ,  
 $qr = z$ , &c.

Donc  $X = ABC$ .

276. ARISTE. Ainsi, 1°. L'aire du cercle X vaut la moitié d'un Parallelograme qui a pour base la circonférence & pour hauteur le rayon du cercle, puisqu'elle vaut un Triangle rectangle ABC qui est la moitié de ce parallelogra-

\* N. me \*.

187. 277. 2°. Le cercle X vaut un Parallelograme qui a pour base la moitié de la circonférence & pour hauteur le rayon du cercle, puisqu'il vaut un Triangle ABC égal à un Parallelograme de cette

\* N. espèce \*.

249.

## PROPOSITION IX.

278. Une ligne disposée en cir-



*conférence de cercle contient plus d'espace qu'en quarré.*

Soit la même ligne, figurée en circonférence de cercle ABC, & en quarré EFGH: je dis que la surface du cercle est plus grande que celle du quarré. Fig: 185.

La surface du cercle est égale à un Triangle rectangle qui a pour base la circonférence & pour hauteur le rayon DA \*; & le quarré est égal à un Triangle rectangle qui a pour base la même circonférence, & pour hauteur l'apothème DI: \* N. 275.

Or  $DA > DI$  \*: donc le Triangle qui a DA pour hauteur est plus grand que le Triangle qui a DI \*, les Triangles de même base étant comme leurs hauteurs: donc une ligne disposée en circonférence de cercle contient plus d'espace qu'en quarré. \* N. 247. \* N. 188.

Par la même raison, la ligne disposée en circonférence de cer-

# 214 XI. ENTRETIEN

cle comprend plus d'espace ; qu'en toute autre figure Poligone réguliere.

De-là, le cercle est la plus grande des figures *Isopérimètres*, ou qui ont les contours égaux.

## PROPOSITION X.

279. *Le diamètre du cercle est la troisième partie du circuit d'un Exagone.*

Le demi-diamètre est la sixième  
\* N. me partie \* : donc le diamètre est  
238. la troisième.

## PROPOSITION XI.

280. *Le diamètre est plus petit que la troisième partie de la circonférence du cercle.*

Le diamètre est la troisième  
\* N. partie du circuit de l'Exagone \*,  
279. plus petit que la circonférence du  
\* N. cercle \*, puis que le Poligone  
261. inscrit, qui a plus de côtés, a plus de circuit.

## PROPOSITION XII.

281. *Le diamètre du cercle est, à peu près, la troisième partie de la circonférence.*

On sçait qu'Archimede comparant avec le diamètre un Poligone de 96 côtés circonscrit au cercle & un Poligone inscrit de 96 côtés, trouva que celui-là étoit au diamètre comme 22 à 7; & celui-ci, comme 223 à 71, ou comme 21,  $\frac{20}{71}$  à 7.

Cela posé; 1°. Le Poligone circonscrit de 96 côtés est au diamètre comme 22 à 7 : or ce Poligone est plus grand que la circonférence\* : donc la raison de la circonférence au diamètre est moins <sup>\* N.</sup> 262. grande que celle de 22 à 7.

2°. Le Poligone inscrit de 96 côtés est au diamètre, comme 223 à 71 : donc la raison de ce Poligone au diamètre est plus grande que celle de 21 à 7 : car 213,

# 216 XI. ENTRETIE N

71 :: 21.7 : 213 contient 3 fois 71, comme 21, contient 3 fois 7. Or la circonférence du cercle est plus grande que le Poligone inscrit de 96 côtés \* : donc la raison de la circonférence au diamètre est plus grande que celle de 21 à 7.

Ainsi, la raison de la circonférence au diamètre est moindre que celle de 22 à 7, & plus grande que celle de 21 à 7.

Donc le diamètre est à la circonférence comme 7 à une quantité plus grande que 21, mais plus petite que 22.

Or 7 est, à peu près, la troisième partie de cette quantité:

Donc le diamètre est, à peu près, la troisième partie de la circonférence.

282. *EUDOXE*. Ainsi connoissant le diamètre, si vous dites : 7.22 :: diamètre.  $x$ , le quatrième terme fera la circonférence, ou

ou à peu près \*. 3 fois le diamètre, un peu plus ; ou 22 parties, un peu moins, telles que le diamètre en contient 7, vous la donneront : \* N.  
281.

*Mais, s'il faut trouver l'aire du cercle . . . . .*

ARISTE. 1°. Je prens la circonférence \*. \* N.

2°. Je multiplie la moitié de la circonférence par le rayon ; & le produit est l'aire du cercle \*. 282.  
\* N.

283. Enfin, le *Secteur* est une partie du cercle terminée par une partie de la circonférence & par deux rayons qui ne fassent pas une ligne droite. 277.

Ainsi le Secteur doit être plus petit ou plus grand que le demi-cercle comme CBDC, ou ABCDEA. Fig.  
186.

Le cercle étant un Poligone régulier d'une infinité de côtés \*, il peut se réduire en une infinité de Triangles de bases égales & d'é- \* N.  
263.

<sup>\* N.</sup> gales hauteurs <sup>\*</sup> ; par conséquent  
 234. le Secteur CBDC est composé  
 d'un certain nombre de Triangles  
 de même hauteur , ayant leur  
 sommet commun dans le centre  
 B du cercle , & leurs bases éga-  
 les dans l'arc CD , qui est la base  
 du Secteur.

Or tous ces Triangles en va-  
 lent un de même hauteur , &  
 dont la base soit égale à celles des

<sup>\* N.</sup> Triangles prises ensemble <sup>\*</sup>.  
 190. Donc le Secteur CBDC vaut  
 un Triangle de même hauteur &  
 de base égale.

Par la même raison , tout autre  
 Secteur du même cercle , com-  
 me CBAEDC, vaudra un Trian-  
 gle de même hauteur & de base  
 égale à celle du Secteur.

Cela posé :

## PROPOSITION XII.

284. Deux Secteurs du même

*cercle font entr'eux comme leurs bases , ou leurs arcs.*

Ces deux Secteurs valent deux Triangles de même hauteur qu'eux , & dont les bases soient égales à celles des Secteurs \*.

\* N

Or les Triangles de même hauteur sont comme leurs bases \*.

\* N

Donc les deux Secteurs du même cercle font entr'eux comme leurs bases ou leurs arcs.

Après cela nous pouvons transformer les Poligones.

*EUDOXE.* J'ai un moment de libre ce soir.

*ARISTE.* Cela suffit.



---

## XII. ENTRETEN.

*Sur la transformation des Poligones  
en d'autres figures de même aire.*

ARISTE. **J**E le vois bien, Eudoxe ; vous êtes homme de parole.

285. EUDOXE. Je profite d'un instant libre. Commençons par réduire un Pentagone en Quadrilatere de même surface.

Fig. 187. ARISTE. Soit le Pentagone irrégulier BCDEF.....

Je tire d'abord de l'angle D à l'angle opposé B une ligne droite DB ; puis sur FB prolongée en G, la ligne CG parallèle à DB ; enfin, la diagonale DG.

Et je dis que le Quadrilatere GDEF est égal au Pentagone BCDEF.

Le Triangle BDG = BDC ;



ayant même base BD & même hauteur entre mêmes parallèles BD, GC\*: donc mettant le Triangle BDG à la place de BDC, j'ai même valeur, ou  $GDEF = BCDEF$ . \* N.  
188.

On peut réduire de même un Exagone, un Poligone quelconque.

286. EUDOXE. *Ce Quadrilatere GDEF, il faut le réduire en Triangle.* Fig.  
188.

ARISTE. Je tire d'abord de l'angle D à l'angle opposé F la droite DF; puis, sur GF prolongée, la ligne EH parallèle à DF; enfin la diagonale DH.

Et puisque le Triangle DFH = DFE sur même base DF & entre mêmes parallèles DF, EH\*, le Triangle GDH est égal au Quadrilatere GDEF. \* N.  
188.

287. EUDOXE. *Ce Triangle GDH, il faut le réduire en Triangle rectangle isocèle.* Fig.  
189.

222 XII. ENTRETEN.

ARISTE. 1°. Par le sommet D, je tire une parallèle IK à la base GH.

2°. Sur les extrémités G, H, de la base, j'éleve deux perpendiculaires, GI, HK\*; & j'ai un Rectangle GK\* double du Triangle GDH de même base & de même hauteur\*.

3°. Je prens une moyenne proportionnelle entre les côtés GH & GI du rectangle\*; & le carré de cette moyenne vaut le rectangle, puisque le rectangle est le produit des extrêmes GH, GI, & que le carré de la moyenne vaut le produit des extrêmes (a).

Enfin, soit ce carré; je le partage en deux Triangles rectangles isocèles LMN, NMO par la diagonale MN\*.

Et je dis que le Triangle GDH = LMN.

Le Triangle GDH est moitié du rectangle GK; & le Triangle

(a) Calcul Littéral, N. 136.

LMN, moitié du quarré  $LO = GK$ .

Or les moitiés de tous égaux sont égales \* : donc le Triangle <sup>\* N. 11.</sup> GDH = LMN.

288. EUDOXE. Ce Triangle rectangle isocèle, LMN, il faut le réduire en parallélograme rectangle. <sup>Fig. 191.</sup>

ARISTE. Ayant abaissé une perpendiculaire LP du sommet L sur la base MN, je fais un Rectangle RTVS qui ait pour base une ligne  $VS = MN$ , & pour hauteur une ligne  $RV = \frac{1}{2} LP$ , & ce rectangle RTVS est égal au Triangle LMN\*. <sup>\* N. 189.</sup>

289. EUDOXE. Ce rectangle RTVS, il faut le transformer en quarré. <sup>Fig. 192.</sup>

ARISTE. Je prens, comme je l'ai fait \*, une moyenne proportionnelle entre les deux côtés du rectangle; je fais un quarré sur cette moyenne proportionnelle, & c'est le quarré égal au rectangle (a). <sup>\* N. 287.</sup>

(a) Calcul Littéral, N. 136.

Tiiiij

224 XIII. ENTRETIEN.

290. EUDOXE. *Enfin, il faut décrire un parallélograme égal à un rectiligne donné.*

\* N. ARISTE. Je réduis le rectiligne  
285. O en un Triangle \* ; & ce Triangle  
286. je le transforme en parallélogra-  
\* N. me \*.  
288.

EUDOXE. Et c'en est assez.

ARISTE. Les plans en général nous occuperont un peu plus.

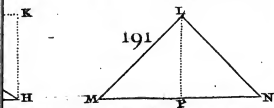
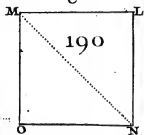
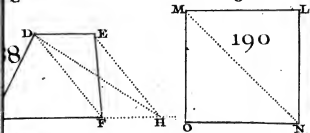
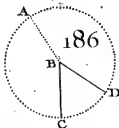
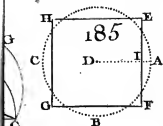
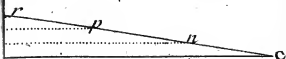
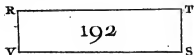
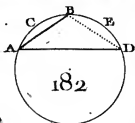
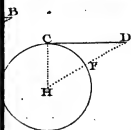
XIII. ENTRETIEN.

*Sur les Plans en général.*

EUDOXE. Vous me parlerez de Plans, Ariste ; je vous parlerai de nouvelles.

Vous direz des vérités ; je dirai des vrai-semblances , au plus : commençons par les vérités qui sont plus intéressantes pour vous & pour moi.

Fig. 291. ARISTE. Hé bien , une  
193. ligne est perpendiculaire à un





plan, lorsqu'elle l'est à toutes les lignes qu'elle rencontre dans ce plan, puisque le plan est composé de toutes ces lignes. Ainsi,  $BC$ , perpendiculaire sur  $ED$ ,  $FG$ , &c. l'est au plan  $EFDGC$ .

292. L'inclinaison d'une ligne à un plan est l'angle aigu qu'elle fait avec le plan.

293. Plans semblables sont ceux dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

294. Comme le produit d'une ligne droite par une autre est un plan, le produit d'un nombre par un autre, est une sorte de plan regardé comme un rectangle; & les nombres plans sont semblables quand leurs racines ou leurs côtés sont proportionnels; tels sont 6 & 24: en effet,  $2 \times 3 = 6$ ,  $6 \times 4 = 24$ ; &  $2.4 :: 3.6$ .

Si deux nombres plans sont semblables, ou que leurs côtés soient proportionnels, ils ont pour ex-

## 226 XIII. ENTRETIEN

posans des nombres quarrés (a) : ainsi comme le produit d'un quarré par un quarré est un quarré (b), le produit de ces plans est un quarré, dont la racine est moyenne proportionnelle entre ces plans (c) : de-là, il y a toujours entre deux nombres plans semblables un moyen proportionnel.

Soient 6, 24, nombres plans semblables :  $6 \times 24 = 144$ , nombre quarré, dont la racine 12 est moyenne proportionnelle entre 6 & 24.

Cela supposé ;

## PROPOSITION I.

295. *Si une ligne est perpendiculaire sur deux lignes qui se coupent dans un plan, elle l'est au plan, ou à toute ligne qui passe par le point de rencontre.*

Soit BC perpendiculaire sur ED,

(a) Calcul numérique, N. 189.

(b) Ibid. N. 23.

(c) Ibid. N. 136.



& FG; faites  $CF = CG$ , &  $CD = CE = CF$ : tirez  $HI$ ,  $EF$ ,  $GD$ , <sup>Fig. 194.</sup>  $EG$ ,  $FD$ ,  $BF$ ,  $BG$ ,  $BE$  &  $BD$ ,  $BH$  &  $BI$ .

Je dis que  $BC$  est perpendiculaire sur  $HI$ .

1°. Les Triangles  $BCF$ ,  $BCG$ ,  $BCE$ ,  $BCD$ , ayant les côtés  $CF$ ,  $CG$ ,  $CD$ ,  $CE$  égaux, le côté  $BC$  commun, & l'angle compris en  $C$ , droit\*, sont égaux\*\*: donc <sup>\* N. 95. \*\* N.</sup> les bases  $BF$ ,  $BG$ ,  $BE$ ,  $BD$  <sup>136.</sup> sont égales.

2°. Les Triangles  $ECF$ ,  $GCD$ , qui ont les côtés  $CF$ ,  $CG$ ,  $CE$ ,  $CD$  égaux par la construction, & les angles  $FCE$ ,  $DCG$  compris & opposés au sommet, égaux\*, <sup>\* N. 93.</sup> sont isocèles égaux\*, donc les angles  $CFE$ ,  $CGD$ ,  $CEF$ ,  $CDG$  <sup>\* N. 127.</sup> sont égaux, & la base  $EF = GD$ .

3°. Les Triangles  $HCF$ ,  $GCI$ , ayant les angles opposés au sommet  $C$  égaux, aussi-bien que les angles  $CFH$ ,  $CGI$ , & les côtés

228 XIII. ENTRETEN

\* N. CF, CG, sont égaux \*.

237. Donc le côté  $CH = CI$ , &  $FH = GI$ .

4°. Les Triangles BFE, BDG, ayant les côtés BF, BG, BE, BD égaux, & les bases EF, GD.

\* N. égales, sont isocèles égaux \* :

234. donc ils ont les angles BGD, BFE, ou BGI, BFH, égaux.

Enfin, les Triangles BFH, BGI, qui ont les côtés BF, BG égaux, aussi-bien que FH, GI, avec les angles BFH, BGI, sont égaux. Donc ils ont les bases BH, BI égales.

Donc BC a deux points dont chacun est également éloigné des points opposés H, I, sçavoir, C & B :

Donc BC est perpendiculaire

\* N. 23. sur HI \*.

PROPOSITION II.

296. Deux lignes perpendiculaires au même plan sont parallèles.

Fig. 295. Soient BC, DE, perpendicu-

SUR LA GÉOMÉTRIE. 229  
lares au plan FG :

Je dis que BC, DE sont parallèles :

BC & DE sont perpendiculaires à toutes les lignes qu'elles coupent , ou qui les coupent dans le plan \*, & par conséquent sur EC. \* N.<sup>295</sup>.  
Or deux perpendiculaires sur une ligne sont parallèles \* : donc BC, \* N. 44.  
DE sont parallèles.

### PROPOSITION III.

297. Une ligne droite qui joint deux parallèles , est dans le même plan.

Si la droite qui joint les 2 parallèles BC , DE , n'est pas comme <sup>Fig.</sup> <sup>196.</sup> FGH dans leur plan , mais hors de leur plan , comme FIH ; deux droites FGH , FIH , enferment un espace , ce qui n'est pas possible , puisque deux lignes droites qui partent d'un point , font un angle rectiligne \* , qui ne bor- \* N. 92.  
ne pas l'espace de tous côtés.

De-là , deux parallèles sont

PROPOSITION IV.

*Fig. 298. De deux paralleles , si l'une*  
*295. ne est perpendiculaire sur un plan ,*  
*l'autre l'est.*

Je dis que si la ligne DE est perpendiculaire sur le plan FG , la parallele CB est perpendiculaire de même.

Approchez CB de ED parallelement , ou sans l'incliner : jointe , elle sera perpendiculaire comme ED : donc n'ayant pas panché , elle l'étoit auparavant.

PROPOSITION V.

*299. Dès qu'une ligne d'un plan*  
*est perpendiculaire à un autre plan ,*  
*le plan où elle se trouve , est perpen-*  
*diculaire.*

*Fig. Soit CD , commune section*  
*297. des plans BD , EF :*

Si la ligne BC du plan BD est perpendiculaire sur le plan EF ,

je dis que le plan BD l'est.

Dès que la ligne BC est perpendiculaire, une autre ligne quelconque GH du même plan BD l'est : car un plan est composé de lignes parallèles \* ; & dès qu'une \* N. 90; parallèle est perpendiculaire sur un plan, l'autre l'est \*.

De-là, l'inclinaison d'un plan <sup>298.</sup> à un plan est l'angle aigu ABC fait par la rencontre de deux lignes perpendiculaires AB, CB sur la commune section DE, tirées l'une dans un plan EF, l'autre dans l'autre plan DG. <sup>Fig. 198.</sup>

Et un plan incliné est un plan qui fait avec un plan un angle aigu.

300. EUDOXE. Vous n'irez pas plus loin sans résoudre quelques Problèmes.

D'abord, d'un point donné B hors d'un plan CD, il faut tirer une per- <sup>Fig. 199.</sup> pendiculaire sur ce plan.

ARISTE. Soit la ligne EG prise

à volonté dans le plan CD, & BF perpendiculaire sur EG, mais inclinée au plan.

Je tire dans le plan CD la ligne FH perpendiculaire à EG; BH perpendiculaire sur FH, IH parallèle à EG.

Et je dis que BH est perpendiculaire au plan CD.

1°. EF étant perpendiculaire sur BF & FH\*, l'est sur le plan BFH, puisqu'une ligne perpendiculaire sur deux lignes qui se coupent dans un plan, l'est sur le plan\*.

295. 2°. IH parallèle à EF est donc aussi perpendiculaire au plan\* N. BFH\*.

298. Donc BH est perpendiculaire à deux lignes FH, IH du même plan CD: donc BH est perpendiculaire à ce plan\*.

295. 301. EUDOXE. Mais il s'agit de tirer une perpendiculaire sur un plan par un point donné dans le plan.

ARISTE.

ARISTE. 1°. D'un point E pris à volonté hors du plan MN, j'abaisse une perpendiculaire EF sur le plan \*. Fig. 200.

2°. Par le point donné B, je mene une parallele GB à la perpendiculaire EF; & GB est la perpendiculaire qu'il falloit tirer, puisque de deux paralleles, si l'une est perpendiculaire, l'autre l'est \*. \* N. 300.

PROPOSITION VI. 298.

302. *La commune section de deux plans, ou la ligne commune aux deux plans qui se coupent, est une ligne droite.*

Soient F, G, deux points communs aux deux plans BC, DE; FG, ligne droite tirée de F en G, extrémités de la commune section. Je dis que la commune section est la droite FG. Fig. 201.

Si la commune section est, non la droite FG, mais la courbe FHG, ou FIG, le plan BC ou DE est plan, par l'hypothèse, sans

244 XIII. ENTRETEN.

l'être en effet, puisqu'une de ses lignes FHG, ou FIG s'écartant de la droite, empêchera qu'une ligne droite tournant sur le plan immédiatement ne la touche également partout & sans obstacle\*.

Si l'on veut que la droite tirée de F en G dans le plan BC soit, non FG, mais FHG, & que la droite tirée de F en G dans le plan DE soit, non FG, mais FIG; les deux droites enfermeront un espace FIGHI, ce qui ne se peut\*.

PROPOSITION. VII.

303. *On ne tire par un point qu'une perpendiculaire au plan.*

Soit AB perpendiculaire sur Fig. CD; je dis que BE ne l'est pas.

202. Si BE est perpendiculaire comme AB, & que BF soit la commune section du plan CD & du plan BEF = ABE; l'angle EBF sera droit comme ABF, ce qui est impossible, puisque EBF n'est qu'une partie de ABF.



Par la même raison , du même point E , l'on ne tirera qu'une perpendiculaire EF sur le plan : car si EB l'étoit aussi , l'angle EBF seroit droit comme EFB , ce qui ne se peut\*.

PROPOSITION VIII. \* N.

304. Si la même ligne est perpen-<sup>122.</sup>  
diculaire sur deux plans , ils sont pa-  
ralleles.

Soit BC perpendiculaire aux<sup>203.</sup>  
deux plans  $\alpha$  ,  $\beta$  : je dis que  $\alpha$  ,  $\beta$   
sont paralleles.

BC , perpendiculaire sur les  
deux plans  $\alpha$  ,  $\beta$  , l'est à une ligne  
quelconque BD , ou CE passant  
par les points de section B , C :  
donc toutes les lignes correspon-  
dantes qui passent par les points  
B , C , sont perpendiculaires sur  
BC , & par conséquent paralleles  
entr'elles\* : or elles sont les deux  
plans\* : donc ils sont paralleles. \* N. 44.

Par la même raison , si une li-<sup>90.</sup>  
gne est perpendiculaire sur trois

plans , ils seront paralleles , une ligne perpendiculaire sur l'un , le fera sur les autres.

## PROPOSITION IX.

*Fig. 305. Deux lignes GH, IH ;  
204. qui se rencontrent dans un plan , &  
se continuent , ne font pas une seule  
ligne droite continuée IK ; mais après  
s'être rencontrées , elles se séparent.*

Du point de rencontre H , intervalle IH , décrivez un cercle ILM :

Si les droites GH & IH se continuent en ligne droite commune HK ; les droites GHK & IHK , passant par le centre H , seront  
\*N.55. deux diamètres \* : donc le segment GLKH sera demi-cercle , aussi-bien que ILKH : donc la partie GLKH sera égale au tout ILKH , ce qui est absurde.

Ainsi , GH & IH se sépareront comme HK , HN.

Par le même principe , deux

lignes droites quelconques venant à se rencontrer, se coupent sans faire une ligne droite commune & continuée.

## PROPOSITION X.

306. Une ligne droite BC tirée Fig.  
dans un plan parallèlement au plan, <sup>205.</sup>  
n'a point une partie hors du plan.

Elle feroit parallèle sans l'être \* \* N. 40.  
puisqu'elle s'écarteroit dans un point.

Aussi, Soit BC, droite tirée dans le plan DE parallèlement au plan :

Je dis que CF supposée hors du plan, n'est point une partie de la droite BC continuée.

Tirez dans le plan la ligne CG perpendiculaire à BC, & CH perpendiculaire CG.

Les angles BCG, GCH sont \* N. 95.  
droits \*, étant faits par des perpendiculaires : donc BC & CH sont même ligne, puisque la même li-

# 238 XIII. ENTRETEN.

gne BH coupée par une perpendiculaire CG fait deux angles droits. Donc CF qui est hors du plan, n'est pas une partie de BC, ou BC continuée. Autrement, deux lignes droites FC, HC, se continueroient en ligne droite commune sans se séparer après s'être rencon-

\* N. trées ; ce qui n'est pas possible \*.

305.

## PROPOSITION XI.

307. Si un plan GF coupe deux  
Fig. plans parallèles AB, CD, les com-  
206. munes sections EF, GH sont parallèles.

Autrement, prolongées en L, elles se rencontreroient, & par conséquent les plans AB, CD dans lesquels elles sont, & dont elles

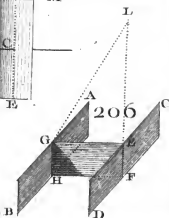
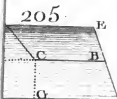
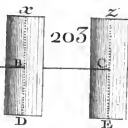
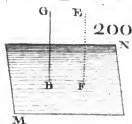
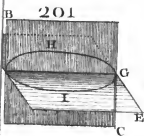
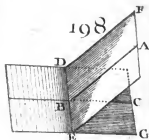
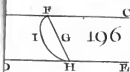
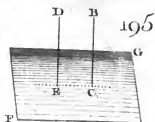
\* N. ne peuvent sortir \*, se rencontreroient aussi ; ce qui ne se peut \* ; ou les plans seroient parallèles par l'hypothèse, & inclinés réellement

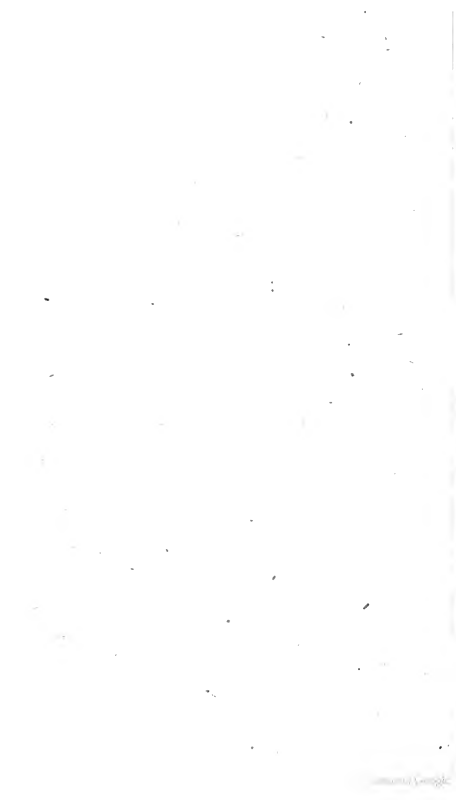
\* N. puisqu'ils iroient se joindre \*.

299.

## PROPOSITION XII.

308. Les plans semblables sont





*comme les quarrés de leurs côtés.*

Ces plans sont Triangles, quadrilateres, ou Poligones semblables : or ces figures semblables sont comme les quarrés de leurs côtés \*.

\* N.

Et les plans multipliés nous<sup>257.</sup> donneront enfin les solides.

EUDOXE. Matière qui me fera d'autant plus de plaisir, qu'elle fera le sujet de plus d'un Entretien.

## XIV. ENTRETIEN.

*Sur les Prismes & les Cylindres.*

ARISTE. **N**ous voilà parvenus insensiblement, Eudoxe, & par degrés aux vérités les plus composées de la Géométrie.

EUDOXE. Et vous allez sans doute les développer à votre ordi-

240 XIV. ENTRETEN  
naire en Propositions naissantes  
les unes des autres. Mais de gra-  
ce , Ariste , par quel secret vous  
remetrez-vous dans l'esprit avec  
ordre tant de vérités assez com-  
pliquées & assez embarrassantes ?

*ARISTE.* Vous voyez cette suite  
de figures Géométriques : parlant  
à mes yeux , elles me rappelle-  
ront dans le même ordre des vé-  
rités que je ne ferai que vous rap-  
peller.

*EUDOXE.* J'ai le loisir de vous  
entendre ; & vous ne sçauriez  
commencer trop tôt , ni finir trop  
tard.

309. *ARISTE.* Le solide ou le  
corps est une portion d'étendue  
considérée comme longue , large  
& profonde.

### *Le Prisme.*

310. C'est un solide compris  
entre plusieurs plans , dont deux  
qu'on nomme bases , sont oppo-  
sés ,



sés, paralleles entr'eux, semblables, égaux; & les autres Parallelogrames.

311. Si les deux plans A, B, Fig.  
opposés, paralleles, semblables <sup>207.</sup>  
& égaux d'un Prisme, sont triangulaires, c'est un Prisme triangulaire.

312. L'axe du Prisme est la ligne droite qui va du milieu d'un plan au milieu du plan parallele. Si le Prisme est droit, l'axe en est la hauteur.

La hauteur d'un Prisme incliné a pour mesure la perpendiculaire tirée du plan supérieur sur la base prolongée.

313. Deux Prismes sont semblables, quand ils sont terminés par même nombre de plans semblables \*. Les Prismes sont semblables & égaux, s'ils sont terminés par même nombre de plans semblables & égaux. \* N.

314. Le Parallelepipede IK Fig.  
208.

Tome II.

X

# 242 XIV. ENTRETIEN

est un Prisme terminé par six Parallelogrames opposés deux à deux , paralleles , semblables , égaux. Ainsi , sa base est un Parallelograme.

Fig. 209. 315. Le cube LM est un Paralelepipedo qui a six plans opposés deux à deux , paralleles , égaux , quarrés.

Cela supposé.

## PROPOSITION I.

316. *Le Prisme est le produit de sa base par sa hauteur.*

Puisque les deux bases sont égales , semblables , paralleles , & que les autres côtés sont Parallelogrames \* ; les plans paralleles à chaque base & intermediaires qui composent le Prisme avec la base , sont tous semblables & égaux à la base.

Ainsi prenez la base autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur perpendiculaire : vous avez

le Prisme : donc le Prisme est le produit de sa base par sa hauteur.

Et par conséquent , c'est le produit de sa hauteur par sa base (a).

317. De-là, 1°. Toute section d'un Prisme faite parallèlement à la base est semblable & égale à la base , puisqu'il est formé par le mouvement parallele de la base \*. \* N.

318. 2°. Deux Prismes de même base , sont entr'eux comme leurs hauteurs ; ou de même hauteur , comme leurs bases , les produits par même multiplicateur étant comme les grandeurs multipliées (b). 316.

319. 3°. Les Prismes de même base & de même hauteur , droits , ou inclinés , sont égaux , puisqu'ils sont comme leurs hauteurs , ou leurs bases.

EUDOXE. Mais le Prisme oblique est plus long que le droit de même

(a) Calcul Littéral, N. 13 .

(b) Ib. d. N. 147.

# 244 XIV. ENTRETIEN

me hauteur & de même base....

ARISTE. Oui : mais le parallélograme oblique est plus long que le droit de même hauteur & de

\* N même base : en est-il plus grand\*?

182. Le parallélograme est moins large à proportion , & le Prisme oblique , moins gros.

## PROPOSITION II.

320. *Un Prisme en vaut plusieurs de même hauteur , lorsque sa base vaut leurs bases prises ensemble.*

1°. Il y a dans chacun de ces Prismes nombre égal de plans parallèles , puisqu'il y a même hauteur.

2°. Chaque plan du plus grand Prisme vaut tous les plans correspondants des autres , étant à ces plans pris ensemble , comme sa base à leurs bases , prises ensemble.

\* N. ble\*.  
318.

## PROPOSITION III.

321. Le Prisme poligone peut se <sup>Fig.</sup> réduire en autant de Prismes trian-<sup>210.</sup> gulaires qu'il a de côtés.

Réduisez les bases Poligones ABCDE, KFGHI du Prisme poligone  $z$ , en autant de Triangles qu'elles ont de côtés \*: ces Triangles sont bases d'autant de Prismes triangulaires \*. <sup>\* N. 234.</sup>

Donc le Prisme poligone peut <sup>311.</sup> se réduire en autant de Prismes triangulaires qu'il a de côtés.

322. L'on peut dire des Parallelepipedes, qui sont des Prismes, ce qu'on a dit des Prismes mêmes \*. <sup>\* N.</sup>

Ainsi, 1°. Le Parallelepiped <sup>314.</sup> est le produit de sa base par sa hauteur \*. <sup>\* N.</sup>

2°. Toute section du Parallelepiped <sup>316.</sup> faite parallelement à sa base, est égale & semblable à sa base \*. <sup>\* N.</sup>

246 XIV. ENTRETIEN.

3°. Les Parallelepipèdes de même hauteur sont comme leurs bases \*, ou de même base , comme leurs hauteurs , &c.

Fig. 211. EUDOXE. Cela va vous donner la solidité d'un Parallelepipède.

323. ARISTE. 1°. Je multiplie la longueur AC par la largeur AB ; & j'ai la base CB \*.

286. 2°. Je multiplie la base par la hauteur AH ; & j'ai la solidité CF , qui est le produit de la base par la hauteur \*.

322. PROPOSITION IV.

Fig. 324. Les Parallelepipèdes CF ; 211. MO , sont entr'eux en raison composée de celles de leurs trois dimensions, longueur , largeur , hauteur.

Les produits de trois dimensions sont en raison composée des raisons de leurs dimensions (a) : or les Parallelepipèdes sont les produits de leurs trois dimensions, longueur , largeur , hauteur \*.

322 & 323. (a) Calcul Littéral , N. 181.

Aussi, 1°. Dans la comparaison des deux Parallelepipedes CF, MO, il y a raisons de longueur AC à longueur IM; de largeur AB à largeur IK; de hauteur AH à hauteur IQ.

2°. Multipliant AC par AB, vous avez la base CB, & multipliant la base CB par AH, vous avez le solide CF\*.

\* N.

Ainsi, CF est le produit des antécédens AC, AB, AH.

323.

Par le même principe, MO est le produit des conséquens IM, IK, IQ.

Or la raison du produit des antécédens & du produit des conséquens de trois raisons, est une raison composée de ces trois raisons (a).

## PROPOSITION V.

325. Deux Parallelepipedes semblables sont en raison triplée.

La raison de ces deux solides est

(a) Calcul Littéral, N. 177.

X iiij

\* N. composée de trois raisons égales\*,  
 313. puisque les Parallelepipedes semblables sont ceux dont les côtés sont proportionnels, ou dont les trois dimensions ont raisons égales : donc elle est triplée (a).

326. Ainsi les Parallelepipedes semblables sont comme les cubes des exposans de leurs côtés homologues (b).

327. EUDOXE. *S'il faut trouver la raison de deux Parallelepipedes semblables . . . .*

ARISTE. 1°. Comparant les trois côtés de l'un avec les trois côtés de l'autre, j'observe les raisons des exposans.

2°. Multipliant les antécédens de ces raisons par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, j'ai dans la raison des produits ou des cubes, celle des deux solides, puisqu'ils sont com-

(a) Calcul Littéral, N. 170.

(b) Ibid. N. 182.



me les cubes des exposans de leurs côtés \*.

\* N.

Une dimension est-elle double <sup>326.</sup> d'une dimension, la longueur de la longueur ? la raison des exposans est 2. 1 ; & comme les trois raisons sont égales \* en triplant 2. <sup>325.</sup> 1, j'ai 2. 1 ; 2. 1 ; 2. 1 : enfin, je cube les antécédens, puis les conséquens ; & la raison des cubes 8, 1 est la raison des deux Parallelepipèdes ; c'est à-dire, que l'un vaut huit fois l'autre.

\* N.

## PROPOSITION VI.

328. Si trois lignes B, C, D ; <sup>Fig.</sup> sont proportionnelles, un Parallelepi- <sup>212.</sup> pede EF fait des trois lignes, sera égal à un Parallelepipède équiangle GH qui aura ses côtes égaux à la ligne du milieu.

Soient donc le Parallelepipède EF fait de  $IF = B$  ; de  $EK = C$ , & de  $IK = D$  ; GH ayant ses trois côtés HL, LM, MG égaux à C.

Si EF, GH sont inclinés, je

250 XIV. ENTRETIEN

tire les perpendiculaires  $KN$  ;  
 $MO$ , qui sont égales : car les angles  $KEP$ ,  $MGQ$  étant égaux ,  
 puisque les solides sont équiangles ; les Triangles  $ENK$ ,  $GOM$   
 ont les angles ou supplémens

\*N 97.  $KEN$ ,  $MGO$  égaux\* , aussi-bien  
 que les angles  $N$ ,  $O$  droits , avec  
 un côté égal , & sont par consé-

\* N. quent égaux\*.

237. Cela posé ; je dis que  $GH = EF$ .

1°. Le plan  $MH$ , Parallelogramme fait sur  $HL = LM = C$  est  
 égal à  $KF$ , Parallelogramme équiangle fait de  $IF = B$ , puisque les  
 Parallelogrammes équiangles sont  
 entr'eux comme les produits de

\* N. leurs côtés \* , & qu'ici ces côtés  
 236. étant en proportion continue par  
 l'hypothèse ,  $HL \times HL = IF \times$   
 $IK$  : donc les bases sont égales.

2°. Les hauteurs  $KN$ ,  $MO$  sont  
 égales aussi.

Or les Parallelepipedes de même

SUR LA GÉOMÉTRIE. 251  
 me base & de même hauteur sont  
 égaux\* : donc  $EF = GH$ .

\* N.  
 322.

PROBLÈME VII.

329. Si quatre lignes sont proportionnelles, les Parallelepipèdes semblables faits sur ces lignes sont proportionnels.

Si les quatre lignes sont proportionnelles, leurs cubes le sont : or les Parallelepipèdes semblables sont comme les cubes de leurs côtés\*.

\* N<sub>4</sub>

PROPOSITION VIII.

326.

330. Dans les Parallelepipèdes égaux BC, DE, les bases BG, DH, & les hauteurs DF, BK, sont réciproques. Fig.  
213.

Soient la hauteur  $DL = BK$ , & la base  $DH = LM$ .

Je dis que la base de BC est à la base de DE, comme la hauteur de DE à la hauteur de BC, ou que  $BG. DH :: DF. BK$ .

$BC. DM :: BG. DH$ , les Parallelepipèdes de même hauteur

252 XIV. ENTRETEN  
 étant comme leurs bases \* : donc  
 $DE = BC. DM :: BG. DH.$

Or  $DE. DM :: DF. DL$ , les  
 Parallelepipèdes de même base  
 étant comme leurs hauteurs.

Et  $DF. DL :: DF. BK = DL.$   
 Donc  $BG. DH :: DF. BK.$

PROPOSITION IX.

Fig. 331. Si l'on coupe un Parallelepi-  
 214. pede par un plan selon la diagonale  
 AB, on le partage en deux Prismes  
 triangulaires égaux.

1°. Les deux parties sont Pris-

\* N. mes triangulaires \*, puisque cha-  
 210. cun a deux bases ABE, CDG,  
 ou ABF, CDH, planes, paralle-  
 les, semblables, égales, trian-  
 gulaires, ou moitiés de parallelo-  
 grames coupés suivant la diago-

\* N. nale \*.

281. 2°. Ces deux Prismes sont  
 égaux, ayant même base & mê-

\* N. me hauteur \*.

322. PROPOSITION X.

332. Les Prismes triangulaires

*semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.*

Ces Prismes sont comme les Parallelepipedes dont ils sont moitiés \*, puisque les moitiés sont \* *N<sub>4</sub>*  
comme les tous. Or les paralleli- 331.  
pipedes semblables sont comme  
les cubes de leurs côtés \*. \* *N<sub>4</sub>*

333. De-là , en général , les 326.  
Prismes semblables, Pentagonaux  
ou éxagonaux, &c. sont entr'eux  
comme les cubes de leurs côtés :  
car ces Prismes peuvent se réduire  
en Prismes triangulaires sembla-  
bles \* qui sont comme les cubes de \* *N<sub>4</sub>*  
leurs côtés \* ; & les tous ou les 327.  
parties prises ensemble , sont mê- 332. *N<sub>4</sub>*  
me chose.

Ce qu'on a dit des Prismes &  
des Parallelepipedes , convient  
aux cubes , qui sont des Parallele-  
pipedes & des Prismes \*. \* *N<sub>4</sub>*

Enfin , dans deux Prismes 315. *N<sub>4</sub>*  
égaux , les bases seront récipro- 314.  
ques aux hauteurs.

## PROPOSITION XI.

Fig. 334. La surface d'un Prisme  
215. droit, sans y comprendre les bases ;  
vaut un parallélograme de même  
hauteur, & dont la base est égale au  
circuit du Prisme.

Les trois parallélogrames, qui  
font la surface totale du Prisme  
triangulaire A, feroient, pris en-  
semble, le Parallélograme B,  
ayant même hauteur & même

\* N. base\*.

288. Il en fera de même, par la mê-  
me raison, de la surface de tout  
autre Prisme droit.

## PROPOSITION XII.

Fig. 335. Enfin, la surface x. d'un  
216. Prisme est double de celle du Poligo-  
ne qu'il a pour base, si le Prisme a  
pour hauteur l'apothème du Poli-  
gone.

Soient ABCEFA, Poligone di-

visé en autant de Triangles égaux  
 qu'il a de côtés\*, & que  $x$  com-  
 prend de Parallelogrames égaux\*;  
 $HI = FE$ , base du Triangle  
 $EGF$  & du Parallelograme  $HE$ ;  
 $GL = LM$ , apothème du Poli-  
 gone ou du Triangle  $EGF =$   
 $HLI$ , & hauteur du Parallelogra-  
 me  $HE$ .

Chaque Parallelograme est à  
 un Triangle correspondant, com-  
 me  $HE$  est à  $EGF$ .

Il suffit donc de prouver que le  
 Parallelograme  $HE$  est double du  
 Triangle  $EGF = HLI$ .

Un Parallelograme est double  
 d'un Triangle de même base &  
 de même hauteur\*: or le Paral-  
 lelograme  $HE$  & le Triangle  
 $HLI = EGF$  ont même base  $HI$   
 & même hauteur  $LM$ , par l'hypo-  
 thèse.

Passerons-nous du Prisme au  
 Cylindre?

*EUDOXE.* Oh ! le Cylindre a

trop de rapport au Prisme pour les séparer.

ARISTE. En effet, ils se ressemblent par bien des endroits.

*Le Cylindre.*

336. C'est un solide qui a deux bases circulaires, égales & parallèles aux plans intermédiaires.

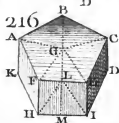
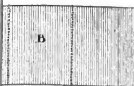
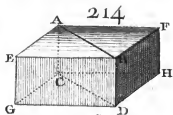
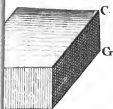
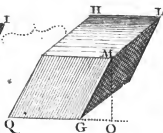
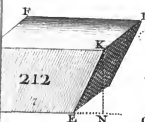
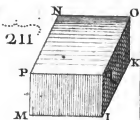
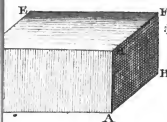
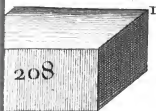
Et comme les cercles sont des Polygones réguliers & semblables \* N. d'une infinité de côtés \*, les côtés  
263. égaux & parallèles des cercles parallèles & égaux qui composent le Cylindre, font autour du Cylindre une infinité de Parallelogrammes \*.

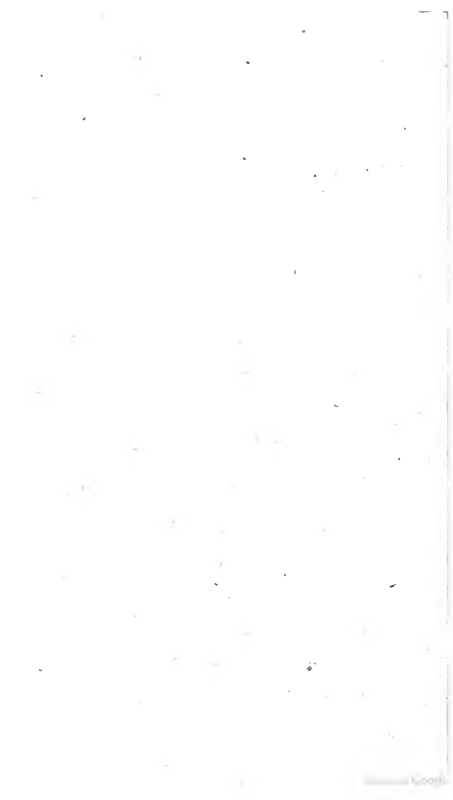
337. Ainsi le Cylindre est un solide compris entre plusieurs plans, dont deux qui sont les bases, sont opposés, égaux entr'eux, parallèles, semblables; & les autres, Parallelogrammes; & par conséquent le Cylindre est un Prisme \* N. me d'une infinité de côtés \*.

310.

Puisque







Puisque le Cylindre est un Prisme, il en a les propriétés.

338. De-là, 1°. La ligne qui va du centre d'une base au centre de l'autre, est l'axe du Cylindre. Fig. 217.

L'axe AB est-il perpendiculaire à la base ? C'est un Cylindre droit, dont la hauteur répond à l'axe AB. Si l'axe est incliné, c'est un Cylindre oblique dont la hauteur se mesure par la perpendiculaire CD qui descend du sommet sur un point hors du centre de la base.

339. 2°. Le Cylindre est le produit de sa base par sa hauteur, ou de sa hauteur par sa base\*. \* N.

3°. Si l'on coupe un Cylindre parallèlement à la base, la section est égale & semblable à la base\*. 316. \* N.

340. 4°. Les Cylindres de même base sont comme leurs hauteurs ; de même hauteur, comme leurs bases\*. 317. \* N.

341. 5°. Les Cylindres sem- 319.

258 XIV. ENTRETIEN.

blables, c'est-à-dire, dont la base est à la base, comme la hauteur à la hauteur, sont comme les cubes de

\* N. exposans de leurs dimensions\*.

333. 342. 6°. Un Cylindre en vaut plusieurs de même hauteur & dont les bases, prises ensemble, valent

\* N. la sienne\*.

320. 343. 7°. Coupez un Cylindre parallèlement à la base : les segmens du Cylindre seront entr'eux comme les segmens de l'axe : car les segmens du Cylindre étant des

\* N. Cylindres de bases égales\*, ils seront comme les hauteurs exprimées par les segmens de l'axe.

344. 8°. Un Cylindre vaut un Prisme triangulaire de même hauteur & de base égale, puisque les Prismes de même hauteur sont

\* N. comme leurs bases\*.

328. 345. 9°. La surface du Cylindre droit, comme celle du Prisme droit, est égale à un Parallélograme de même hauteur &

dont la base est égale au circuit de la base du Cylindre \*.

346. 1°. Si la hauteur du Cylindre est égale au rayon du cercle qui en est la base, la surface du Cylindre est double de ce cercle, comme la surface du Prisme, qui a pour hauteur l'apothème, ou le rayon droit de la base, est double de celle de la base \*.

347. EUDOXE. Aussi le cercle qui fait la base du Cylindre, est le produit de la moitié de la circonférence par le rayon \*; & la surface du Cylindre est le produit de la circonférence entière par le rayon qui exprime la hauteur du Cylindre.

ARISTE. Ajouterai-je deux Propositions qui semblent naître de ce que vous venez dire?

# PROPOSITION I.

348. Les surfaces de deux Cylindres droits sont en raison composée de

Y ij

260 XIV. ENTRETIEN

*celles de leurs hauteurs , & du contour de leurs bases,*

Ces surfaces sont égales à deux Parallelogrames de même hauteur, chacun, que le Cylindre correspondant, & dont les bases sont égales aux circuits des bases correspondantes de ces Cylindres \* :

\* N. 345. or les Parallelogrames sont en raison composée de celles de leurs hauteurs, & de leurs bases \*.

191. De-là, si la hauteur est à la hauteur, comme le circuit de la base au circuit ; les surfaces sont en raison doublée de celle de la hauteur à la hauteur, ou du circuit au circuit \*.

\* N. 270. PROPOSITION II.

349. *Dans deux Cylindres droits ; si les bases sont égales , les surfaces seront comme les hauteurs.*

EUDOXE. Alors, les circuits des bases seront égaux. Ainsi, les surfaces seront comme deux rec-

SUR LA GÉOMÉTRIE. 261  
rangles dont les bases seront égales à ces circuits : or les rectangles de bases égales sont comme leurs hauteurs \*.

Et je vois bien qu'il sera question des Pyramides & des Cônes dès que je pourrai me rendre ici. <sup>\* N<sup>o</sup> 188.</sup>

---

## XV. ENTRETIEN.

*Sur les Pyramides & les Cônes.*

EUDOXE. **H**E bien , Ariste , de quoi s'agit-il ? Est-ce de Pyramide ou de Cône ?

ARISTE. De l'un & de l'autre.

EUDOXE. C'est - à - dire , que nous allons creuser jusques dans le fond du Cylindre & du Prisme pour y découvrir les propriétés secrètes de la Pyramide & du Cône qui font parties de ces solides. La recherche est assez délicate & épineuse.

262 X V. ENTRETIEN

*ARISTE.* En allant pas à pas, on ne laisse pas d'avancer & d'approfondir.

*EUDOXE.* Allez donc ; & je vous suis sans déranger le fil de vos Propositions.

350. *ARISTE.* D'abord, la Pyramide est un solide terminé par plusieurs plans triangulaires, qui ont un sommet commun & leurs bases dans le même plan BCD.

Fig. 218. Si la base commune est triangulaire, c'est une Pyramide triangulaire ABCD, ayant trois plans triangulaires ABC, ACD, ABD sur cette base BDC, avec un sommet commun A. Si la base est un Poligone, c'est une Pyramide poligone.

La ligne qui descend du sommet au milieu de la base, est l'axe de la Pyramide.

Si l'axe est perpendiculaire à la base, la Pyramide est droite ; s'il est oblique, elle est inclinée.



La hauteur de la Pyramide inclinée se mesure par la perpendiculaire qui descend du sommet sur un autre point que le milieu de la base, ou sur la base prolongée.

351. Les Pyramides semblables sont celles qui sont terminées par même nombre de plans semblables.

### PROPOSITION I.

352. *Un plan angulaire, qui s'élève parallèlement à lui-même & diminue également à mesure qu'il s'élève, décrit une pyramide.*

Ce plan décrit un amas de plans angulaires & parallèles qui décroissent également à mesure qu'ils sont plus élevés. Or cet amas de plans angulaires est une Pyramide \*, puisque leurs côtés qui diminuent également, sont <sup>350.</sup> étant ajoutés parallèlement les uns

aux autres , les plans angulaires qui terminent le solide , ayant un sommet commun , & leurs bases dans le même plan.

## PROPOSITION II.

353. *La section d'une Pyramide parallèlement à la base , est semblable à la base.*

Les plans paralleles dont la  
 \* N. Pyramide est faite \* , sont sem-  
 352. blables à la base , puisque la Pyramide est la base même , diminuant toujours de grandeur également sans changer de figure. Or la section parallele à la base est un de ces plans.

Fig.  
 219. Aussi , dans la Pyramide  $p$  , le plan triangulaire  $NLI$  parallele à la base  $BCD$  , est semblable à cette base : car si un plan coupe deux plans paralleles , les sections sont  
 \* N.  
 307. paralleles \* . Ainsi les lignes  $LI$  &  $CD$  ,  $IN$  &  $DB$  ,  $NL$  &  $BC$  sont paralleles ; & par conséquent le

le Triangle  $NLI$  est semblable au Triangle  $BCD$ , ayant mêmes angles.

Par la même raison, le plan  $KMO$  sera semblable à la base  $FGH$ .

De-là, 1°. La Pyramide a autant de côtés que la base. 2°. Les Pyramides semblables ont pour bases des plans semblables.

### PROPOSITION III.

354. La Pyramide poligone se réduit en Pyramides triangulaires.

Sa base est un Poligone<sup>\*</sup>, qui se réduit en Triangles<sup>\*</sup> : or sur ces Triangles, élevez des plans<sup>234</sup> paralleles, figurés de même, & diminuant également jusqu'au sommet : ce seront des Pyramides triangulaires<sup>\*</sup>.

Ainsi, la Pyramide poligone<sup>350</sup> vaut plusieurs Pyramides triangulaires<sup>352</sup> de même hauteur & dont

266 XV. ENTRETEN  
les bases, prises ensemble, val-  
lent la sienne.

# PROPOSITION IV.

355. *Deux Pyramides triangulaires de même hauteur, sont comme leurs bases.*

Toutes les sections ou tranches paralleles à la base, sont  
\* N. semblables à la base \*.

353. Ainsi, les tranches d'une Pyramide sont aux tranches correspondantes de l'autre, comme la base à la base. Or chaque Pyramide ayant même hauteur, n'est qu'un nombre égal de ces tranches: donc l'une est à l'autre, comme la base à la base.

Fig.  
219. Aussi, soient P, Q, deux Pyramides triangulaires; l'une perpendiculaire P, l'autre inclinée Q, ayant même hauteur ER, & par conséquent même nombre de Triangles;  $ES=AI$ ,  $ET=AD$ ;

SXK parallele à TRF; NLI, KMO, deux tranches ou plans triangulaires à même hauteur & paralleles aux bases BCD, FGH.

Je dis que  $P.Q :: BCD.FGH.$

1°. Les Triangles NLI & BCD, KMO & FGH sont semblables \*, ainsi que ALI & ACD, ESX & ETR, EXK & ERF, EKM & EFG \*.  
\* N. 353.  
\* N. 133.

2°. Les Triangles semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues \*, & si les racines sont proportionnelles les puissances le sont (a). Cela posé; le Triangle NLI.BCD ::  $LI^2.CD^2$  ::  $AI^2.AD^2$  ::  $ES^2.ET^2$  ::  $EX^2.ER^2$  ::  $EK^2.EF^2$  ::  $KM^2.FG^2$  :: KMO. FGH.  
\* N. 197.

Mais deux raisons égales à une troisième, sont égales entr'elles (b).

(a) Calcul Littéral, N. 185.

(b) Ibid. N. 104.

Zij

Donc  $NLI. BCD :: KMO. FGH$  (a).

Donc par la même raison , chaque tranche triangulaire de P , est à chaque tranche correspondante de Q , comme la base BCD à la base FGH ; & par conséquent l'assemblage total des tranches de P est à celui de Q , comme BCD à FGH , ou  $P. Q :: BCD. FGH$ .

356. De-là , 1°. Les bases des Pyramides semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues : car ces bases sont

\* N. Triangles ou plans semblables \* ,  
351. & les plans semblables sont comme les quarrés de leurs côtés ho-

\* N. homologues \* .  
308.

357. 2°. Les Pyramides de même hauteur sont comme leurs

\* N. bases : car les Pyramides polygones se réduisent en triangulaires \* :  
354.

\* N. or les triangulaires de même hauteur sont comme leurs bases \* .  
355.

(a) Calcul Littéral , N. 144.

358. 3°. Les Pyramides de même hauteur & de même base sont égales, puisque de même hauteur elles sont comme leurs bases\*. \* N.  
357.

## PROPOSITION V.

359. Le Prisme triangulaire,  $x$ , Fig.  
220. se réduit en trois Pyramides triangulaires égales.

Divisez les trois rectangles AE, EC, AF, par trois diagonales BD, BF, CD: il se forme trois Pyramides triangulaires ABCD, DBFE, FDCB.

Or, 1°.  $ABCD = DBFE$ , ayant base égale, sçavoir le Triangle  $ABC = DEF$ , & égale hauteur, sçavoir le côté  $AD = EB$ \*. \* N.

2°.  $FDCB = ABCD$ , ayant 310. base égale, sçavoir le Triangle  $FDC = ADC$ , autre moitié du rectangle CD\*, & égale hauteur, \* N. sçavoir, GB, hauteur commune. 181.

Mais si deux grandeurs sont égales à une troisième, les trois

sont égales : donc  $ABCD = DBFE = FDCB$ .

Donc le Prisme triangulaire se réduit en trois Pyramides triangulaires égales.

Ainsi, la Pyramide triangulaire est le tiers d'un Prisme triangulaire.

360. De-là, 1°. La Pyramide poligone est le tiers d'un Prisme poligone de base égale & de même hauteur.

Car la Pyramide poligone se réduit en Pyramides triangulaires\*,  
 354. & le Prisme poligone en Prismes  
 \* N. triangulaires\* : or chacune de ces  
 321. Pyramides triangulaires est le tiers d'un de ces Prismes triangulaires\* : donc les Pyramides, prises  
 359. ensemble, sont le tiers des Prismes, pris de même : mais ces Pyramides font la Pyramide poligone ; & ces Prismes, le Prisme : donc la Pyramide poligone est le tiers du Prisme poligone de base



SUR LA GÉOMÉTRIE. 27<sup>e</sup>  
égale & de même hauteur.

361. 2°. Les Pyramides de même base sont comme leurs hauteurs.

Car les tiers des Prismes sont comme les Prismes dont ils sont les tiers : ainsi les Pyramides étant les tiers des Prismes de même base & de même hauteur\*, sont comme ces Prismes. \* N. 360.

Or les Prismes de même base sont comme leurs hauteurs\*.

362. 3°. Les Pyramides semblables sont entr'elles comme les cubes de leurs côtés homologues, puisque les Prismes semblables, dont elles sont les tiers, sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues\*. \* N. 318.

D'ailleurs, les Pyramides semblables sont comme les Prismes triangulaires qui les donnent\*, ou qu'elles donnent\*, & ces Prismes étant moitié des Parallelepipèdes semblables\*, sont, com- \* N. 333.  
\* N. 359.  
\* N. 354.  
\* N. 331.

Z iiij,

272 X V. ENTRETEN

me eux , en raison triplée de celle  
 \* N. de leur hauteur \*.

325.

363. EUDOXE. Mais s'il falloit  
 mesurer la solidité d'une Pyrami-  
 de , comment vous y prendriez-  
 vous ?

ARISTE. Je multiplierois la ba-  
 se par le tiers de la hauteur.

La base multipliée par la hau-  
 teur donneroit un Prisme de mê-

\* N.  
 316.

me base & de même hauteur \* :  
 donc la base multipliée par le tiers  
 de la hauteur , donnant le tiers du  
 Prisme , donneroit la Pyramide

\* N.  
 359.

qui en est le tiers \*.  
 Mesurons la surface.

PROPOSITION VI.

364. La surface d'une Pyramide  
 droite , vaut un Triangle de hauteur  
 égale à la hauteur de chacune de ses  
 faces , & de base égale au circuit de  
 la base de la Pyramide.

Cette surface est composée de  
 plusieurs faces qui sont autant de

Triangles de même hauteur \*. \* N.  
 Or ces Triangles , pris ensemble ,<sup>350.</sup>  
 valent un Triangle de même hauteur & de base égale aux bases , prises ensemble , de ces Triangle \* , c'est-à-dire , au circuit de<sup>\* N.  
190.</sup>  
 la base de la Pyramide.

De-là , cette surface est moitié d'un Parallelograme de même hauteur qu'elle , & de même base ; & par conséquent égale à un Parallelograme de même hauteur & de base moitié plus petite \*. \* N.

*EUDOXE.* Mais pourquoi ne faites-vous pas la surface de la Pyramide droite moitié d'un Parallelograme de même hauteur que la Pyramide même ?<sup>189.</sup>

*ARISTE.* Comme les faces de la Pyramide sont des Triangles \* , \* N.  
 la hauteur de chaque face est , non<sup>350.</sup>  
 la hauteur de la Pyramide même , mais la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base de la face \*. \* N.  
<sup>183.</sup>

## 274 X V. ENTRETIEN

Ainsi la hauteur de la surface de la Pyramide a pour mesure, non la perpendiculaire qui descend du sommet sur la base de la Pyramide , mais la perpendiculaire tirée du sommet sur la base de la surface même.

*EUDOXE.* Apparemment la Pyramide nous conduit au Cône.

*ARISTE.* C'est à peu près la même chose.

### *Le Cône.*

*Fig. 365.* C'est un Solide ABCDE fait du cercle BCDE, qui va toujours parallèlement à lui-même ; mais en diminuant également jusqu'à ce que la Figure se termine en pointe A.

*227.* 366. Ainsi, comme le cercle est un Poligone d'une infinité de \* N. côtés \*, & que chaque côté qui va toujours en diminuant parallèlement à lui-même fait un Triangle ; le Cône est un Solide termi-

*263.*

né par une infinité de plans triangulaires ; & par conséquent le Cône est une Pyramide d'une infinité de côtés \*.

\* N<sup>o</sup>

Aussi plus la Pyramide a de cô- 350.  
tés , plus elle approche du Cône :  
donc une Pyramide d'une infinité  
de côtés ne diffère pas du Cône.

Puisque le Cône est Pyramide ,  
il en a les propriétés.

367. De-là, 1<sup>o</sup>. La ligne AF  
qui descend de la pointe du Cône  
au milieu de la base , est l'axe.  
L'axe est-il perpendiculaire à la  
base ? C'est un Cône droit , &  
l'axe en mesure la hauteur. Si l'axe  
est incliné , c'est un Cône obli-  
que. La hauteur du Cône incliné  
est la perpendiculaire qui descend  
sur un autre point que le milieu de  
la base.

368. 2<sup>o</sup>. La hauteur de la sur-  
face du Cône est la ligne droite  
tirée du sommet à la base de la  
surface \*.

\* N<sup>o</sup>

364.

## 276 XV. ENTRETIEN.

369. 3°. La section d'un Cône faite parallèlement à la base est

\* N. semblable à la base \*.

353. 370. 4°. Un Cône est le tiers d'un Cylindre de même base & de même hauteur : car le Cône

\* N. est une Pyramide \* ; & le Cylindre,

\* N. un Prisme \* : or la Pyramide

337. est le tiers d'un Prisme de même base & de même hauteur, &

\* N. par conséquent d'un Cylindre \*.

360. 371. 5°. Un Cône en vaut plusieurs de même hauteur, & dont les bases prises ensemble, valent

\* N. la sienne \*.

354. 372. 6°. Les Cônes de même base sont comme leurs hauteurs ; de même hauteur, comme leurs

\* N. bases \*.

361. 7°. Les Cônes semblables, ou dont la base est à la base, comme la hauteur à la hauteur, sont en raison triplée, ou comme les cubes

\* N. de leurs côtés \*.

365. Mesurons les surfaces en détail.

## PROPOSITION I.

373. La surface du Cône droit vaut un Triangle rectangle de même hauteur que la surface du Cône, & dont la base est égale au circuit de la base du Cône.

Telle est la valeur de la surface de la Pyramide\*, & par conséquent de la surface du Cône\*. \* N<sub>1</sub>  
364.  
\* N<sub>1</sub>

374. De-là, 1°. La surface du Cône droit vaut un Rectangle de même hauteur qu'elle, & dont la base est moitié du circuit de celle du Cône, puisque cette surface vaut un Triangle\*, qui est égal à ce Rectangle\*. \* N<sub>1</sub>  
373.  
\* N<sub>1</sub>

375. 2°. Les surfaces de deux Cônes sont en raison composée de celles de leurs bases & de leurs hauteurs : car ces surfaces sont comme deux Rectangles\*; & les Rectangles sont en raison composée de celles de leurs bases & de leurs côtés\*. \* N<sub>1</sub>  
374.  
\* N<sub>1</sub>  
394.

## 278 XV. ENTRETIEN

376. Si deux Cônes ont les surfaces semblables, elles seront en raison doublée de celle de leurs bases ou de leurs hauteurs, comme les Rectangles \*.

\* N.  
198.

377. Si les surfaces sont de même hauteur, elles seront comme leurs bases ; de même base, comme leurs hauteurs ; de même base & de même hauteur, égales, ainsi que les Rectangles \*.

\* N.  
188.

### PROPOSITION II.

378. Si les surfaces de deux Cônes sont de même hauteur, elles sont entr'elles comme les diamètres de leurs bases.

De même hauteur, elle sont

\* N. comme leurs bases \*, qui sont cir-

377. \* N. conférences \*: or les circonfé-

365. rences sont comme leurs diamé-

\* N. tres \*.

265.

### PROPOSITION III.

379. La surface du Cône est à la



surface du cercle qui en est la base, comme la hauteur de la surface du Cône est au rayon du cercle.

Soient A la surface d'un Cône ; *Fig<sup>1</sup>*  
 BC, la hauteur de la surface ; <sup>222,</sup>  
 CDEF le circuit du cercle N,  
 ou de la base ; NC, le rayon ; H  
 côté = BC ; I côté = CDEF ;  
 G, Triangle rectangle ; L, côté  
 = NC ; M, côté = CDEF ; K,  
 Triangle rectangle.

1°. Le Triangle rectangle G  
 vaut la surface A\*, de même ba- \* N  
 se & de même hauteur, par la con- <sup>373,</sup>  
 struction.

2°. Le Triangle K, vaut le cer-  
 cle N\* ayant pour base la circon- *Fig<sup>1</sup>*  
 férence & pour hauteur le rayon. <sup>275,</sup>

Cela supposé ; il suffit de prou-  
 ver que le Triangle G est au Trian-  
 gle K, comme le côté H au côté  
 L ; en un mot, que  $G. K :: H. L.$

Or la base  $I = M$ , par la con-  
 struction, & les Triangles de mê-  
 me base sont comme leurs hau-

\* N. teurs\* : donc G. K :: H. L.

288. N'en est-ce pas assez , Eudoxe ,  
pour l'intelligence de la Sphere ?

EUDOXE. Nous en ferons l'essai  
dès demain.

## XVI. ENTRETEN.

*Sur la Sphere.*

EUDOXE. **I**L s'agit donc , Ariste ,  
de mesurer des Glo-  
bes ?

ARISTE. Le Globe même de la  
Terre : car , Eudoxe , si vous avez  
la patience de m'accompagner ,  
allant de Propositions en Proposi-  
tions , nous pénétrerons jusqu'au  
centre de la Terre pour en mesu-  
rer également la surface & la soli-  
dité ; peut-être irons nous jusques  
à mesurer la grandeur du Soleil.

EUDOXE. Ne verrois - je pas  
volontiers tout ce qui conduit à  
des

SUR LA GÉOMÉTRIE. 281  
des vérités si sublimes ?

Développez la suite de vos idées ;  
& vous me trouverez docile &  
attentif.

ARISTE. Nous commencerons  
donc par définir.

### DÉFINITIONS.

380. La Sphère ABCDA est Fig.  
un solide borné de tous côtés par <sup>223.</sup>  
une surface dont tous les points  
sont également éloignés d'un  
point intérieur E, qui est le cen-  
tre de la Sphère.

381. Ainsi , le centre de la  
Sphère est également éloigné de  
tous les points de la surface.

De-là , toutes les lignes EB ,  
ED , &c. tirées du centre à la sur-  
face sont égales.

382. Le diamètre BED de la  
Sphère est une ligne droite , qui  
va d'un point de la surface par le  
centre au point opposé ; & le  
rayon EB de la Sphère est un

282 XVI. ENTRETIEN  
demi-diamètre. Et par conséquent tous les rayons, aussi-bien que les diamètres de la même Sphère, sont égaux; & elle a autant de diamètres que de lignes droites qui traversent le centre.

383. La révolution d'un demi-cercle autour d'un diamètre AEC donne la Sphère; & ce diamètre est l'axe de la Sphère; & comme elle peut être formée par la révolution d'un demi-cercle tournant autour d'un diamètre quelconque, tout diamètre peut être axe.

384. Le demi-cercle est composé de Sinus perpendiculaires à l'axe, & dans la révolution du demi-cercle chaque Sinus FG décrit un cercle FGH parallèle au grand cercle BED de la Sphère.

De-là, les grands cercles & les petits cercles de la Sphère; les grands cercles, qui ont pour rayon, le rayon même de la Sphère, & passent par le centre; les

petits cercles , qui ont pour rayon un Sinus , plus petit que le rayon de la Sphère \*.

\* N. 66.

385. La Sphère est inscrite au Cylindre , quand le Cylindre a pour base le grand cercle & pour hauteur le diamètre de la Sphère.

La moitié de la Sphère est un Hémisphère.

Enfin deux Sphères sont semblables , parce que les raisons des trois dimensions de l'une aux trois dimensions de l'autre sont égales\*.

\* N. 382.

# PROPOSITION I.

386. *La section d'une Sphère par un plan est un cercle.*

Je dis que le plan BFCHG, Fig.  
section d'une Sphère qui a pour 224.  
centre le point E, est un cercle.

Soient EG perpendiculaire tirée du centre E de la Sphère sur la section ; EB, EC, &c. tirées du même centre E aux extrémités de la section.

A a ij

1°. EB, EC, &c. sont obliques, puisque d'un point l'on ne tire qu'une perpendiculaire sur un  
 \* N. plan \* ; & GB, GC, &c. sont  
 303. éloignemens du perpendicule..

2°. EB, EC, &c. sont obliques égales, étant rayons de la même Sphère\*, & la perpendiculaire EG est la même.  
 \* N.  
 382.

Or les obliques égales appuyées sur même perpendiculaire, ont mêmes éloignemens du perpendicule\*.

\* N. 37. Donc GB, GC, &c. sont rayons égaux..

Toutes les obliques seront égales, & tous les éloignemens du perpendicule seront égaux, par la même raison.

Donc le plan BFCHG est un cercle..

## PROPOSITION II.

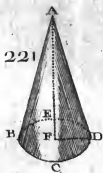
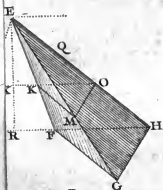
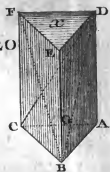
387. La demi-Sphère est égale aux



218



220



221



222



223







**SUR LA GÉOMÉTRIE.** 285  
*deux tiers d'un cylindre de même  
 base & de même hauteur.*

Soient  $ABCD$ , Cylindre ; Fig<sup>3</sup>.  
 $BED$ , demi-Sphère ;  $ABEDC$ , <sup>225</sup>  
 enveloppe ;  $AFC$ , Cône de mê-  
 me base  $AC$  & de même hauteur  
 $EF$  que le Cylindre ;  $GHI$ , plan  
 parallele & égal à la base  $BFD$ ,  
 contenant trois cercles ; le pre-  
 mier dans le Cylindre, & qui a  
 pour rayon  $HG$  ; le second, dans  
 la demi-Sphère \*, & qui a pour \* *N.*  
 rayon  $HK$  ; le troisième, dans le <sup>386</sup>  
 Cône, & qui a  $HL$  pour rayon ;  
 $FKP$ , Triangle rectangle, dont  
 l'hypothénuse  $FK = HG$  ; le côté  
 $FP = HK$ , le côté  $PK = LR$   
 $= FH$  perpendiculaires entre mê-  
 mes paralleles \* ;  $LH = FH =$  \* *N. 40.*  
 $KP$ , puisqu'un Parallelograme sur  
 la diagonale d'un Quarré & qui a  
 un angle commun, est un Quar-  
 ré \* ;  $GK = SI$ , Couronne de l'en- \* *N.*  
 velope, & qui répond au cercle. <sup>215</sup>  
 $LMNO$  du Cône.

## 286 XVI. ENTRETIEN

La demi-Sphère  $BED = ABCD - ABEDC$ ; donc si  $ABEDC$  est le tiers de  $ABCD$ ,  $BED$  en fera les deux tiers.

Par conséquent il suffit de prouver que  $ABEDC$  est le tiers de  $ABCD$ , ou que  $ABEDC$  vaut le Cône  $AFC$ , tiers du Cylindre

\* N.  $ABCD$  \*.

370. Si chaque Couronne de l'enveloppe  $ABEDC$  vaut un cerole correspondant du Cône  $AFC$  com-

\* N. posé de cercles paralleles \* , l'en-  
365. velope  $ABEDC$  vaut le Cône  $AFC$ , puisque l'enveloppe & le Cône ont même base & même hauteur.

Il reste donc à démontrer que chaque Couronne vaut le cercle correspondant du Cône, ou que  $GK + SI = LMNO$ .

Et je le démontre.

Du cercle qui a pour rayon  $FK$ , ôtez le cercle qui a pour rayon  $FP$ : reste la valeur du cer-

de qui a pour rayon  $PK = LH$ ,  
 puisque le cercle qui a pour rayon  
 l'hypothénuse, vaut les deux cer-  
 cles qui ont pour rayons les cô-  
 tés \*.

\* N.  
 273.

Or  $HG = FK$  ;  $HK = FP$  ;  
 $LH = PK$  : donc si du cercle qui  
 a pour rayon  $HG$ , l'on ôte le cer-  
 cle qui a pour rayon  $HK$  ; le reste  
 est la valeur du cercle qui a pour  
 rayon  $LH$ , ou du cercle  $LMNO$ .

Mais enfin , ce qui reste est la  
 Couronne  $GK + SI$  : donc  $GK$   
 $+ SI = LMNO$ .

De-là , si l'on multiplie le grand  
 cercle  $BD$  de la demi-Sphère par  
 les deux tiers du rayon  $FE$ , le pro-  
 duit sera la solidité de la demi-  
 Sphère , puisqu'il est les deux tiers  
 du Cylindre circonscrit.

### PROPOSITION III.

388. La Sphère vaut les deux  
 tiers d'un Cylindre de même largeur  
 et de même hauteur.

## 288 XVI. ENTRETIEN

La demi-Sphère vaut les deux tiers d'un Cylindre de même lar-

\* N. geur & de même hauteur\* ; donc.  
 387. la Sphère vaut les deux tiers d'un Cylindre double du premier, ou qui a même largeur & même hauteur que la Sphère.

Fig. Aussi, 1°. La Sphère inscrite.  
 226. BEDQ vaut le Cylindre ACFG, moins les deux Cônes AHF, CHG, opposés au sommet dans  
 \* N. le centre H\*.

387. 2°. Les Cônes AHF, CHG sont égaux, ayant même base AF = CG & même hauteur HE =

\* N. HQ\*.  
 372. 3°. Le Cône AQF = AHF + CHG, ou AQF = 2AHF, ayant même base AF, & double hauteur EH + HQ = EH, puisque les Cônes de même base sont  
 \* Ibid. comme leurs hauteurs\*.

Donc la Sphère BEDQ vaut le Cylindre ACFG, moins le Cône AQF.

Or

Or le Cône AQF est le tiers du  
Cylindre ACFG de même base  
& de même hauteur \*. \* N.

Donc la Sphère BEDQ vaut <sup>370.</sup>  
le Cylindre ACFG, moins le  
tiers : donc elle en vaut les deux  
tiers.

Ainsi, 1°. Le Cylindre contient  
une fois & demi la Sphère inscri-  
te, & par conséquent la raison du  
Cylindre à la Sphère inscrite est  
*sesquialtere*.

2°. La Sphère est le produit de  
son grand cercle par les deux tiers  
du diamètre, puisque ce produit  
vaut les deux tiers du Cylindre.

#### PROPOSITION IV.

389. *Une Sphère vaut une Pyra-  
mide, ou un Cône \*, qui a pour base* \* N.  
*la Surface, & pour hauteur le rayon* <sup>366.</sup>  
*de la Sphère.*

La Sphere peut être regardée  
comme un Solide composé de Py-  
ramides qui ayent pour hauteur le

# 290 XVI. ENTRETIEN

rayon de la Sphère, leurs sommets au centre, & leurs bases à la Surface; car on peut considérer la Surface d'une Sphère comme composée d'une infinité de Poligones infiniment petits: or ces Pyramides prises ensemble, valent une Pyramide qui a pour hauteur le rayon & pour base la

\* N. Surface de la Sphère \*.

354. 390. De-là, 1°. Une Sphère vaut un Cône qui a pour base la surface, & pour hauteur le rayon de la Sphère, puisque le Cône

\* N. est une Pyramide \*.

366. 391. 2°. La Sphère est le tiers d'un Cylindre qui a pour hauteur le rayon & pour base la surface de la Sphère.

Car La Sphère vaut une Pyramide qui a pour hauteur le rayon & pour base la Surface de la Sphère.

\* N. re \*. Or cette Pyramide est le tiers  
389. d'un Prisme, qui ait même base qu'elle & même hauteur \*, & par

conséquent d'un Cylindre, qui est <sup>\* N.</sup>  
un Prisme \*. 360.

392. 3°. La Sphère vaut le pro- <sup>\* N.</sup>  
duit de sa Surface par le tiers de son 336.  
rayon : car la Sphère vaut une Py-  
ramide ou un Cône qui a pour  
base la Surface de la Sphère &  
pour hauteur le rayon de la Sphé-  
re \* : or multipliant cette base par  
le tiers de la hauteur, vous avez la <sup>\* N.</sup>  
Pyramide ou le Cône \*. 389.

\* N.

363.

PROPOSITION V.

393. *Deux Sphères sont en raison triplée, ou comme les cubes des diamètres de leurs grands cercles.*

Les Cylindres semblables sont  
comme les cubes des diamètres  
qui représentent les dimensions  
de leurs bases égales aux cercles  
des Sphères inscrites \* : donc les <sup>\* N.</sup>  
deux Sphères, qui étant sembla- 341.  
bles \*, sont les deux tiers de ces  
Cylindres \*, sont\* comme les cu- <sup>\* N.</sup>  
288.

bes des diamètres de leurs grands cercles , les parties semblables étant comme les tous.

D'ailleurs , deux Sphères , qui sont deux solides semblables , valent deux Pyramides semblables qui ont pour hauteurs les rayons

\* N. des Sphères \* : or deux Pyramides semblables sont en raison tri-

\* N. plée de leurs hauteurs \* : donc elles sont comme les cubes des rayons , & par conséquent des diamètres.

394. EUDOXE. *L'on vous donne deux Boules , dont l'une a le rayon double de l'autre : quelle est la raison des deux Boules ?*

ARISTE. Puisque le rayon est double du rayon , les exposans de la raison des rayons sont 2 , 1 , dont les cubes sont 8 , 1.

Or les deux Boules sont entr'elles comme les cubes des expo-

\* N. sans des rayons \* : donc elles sont entr'elles comme 8 à 1 ; c'est-à-



dire; que celle qui a le rayon double est octuple de l'autre.

Mesurons les Surfaces.

# PROPOSITION VI.

395. *La Surface,  $x$ , de la demi-Sphère est égale à la Surface,  $z$ , du Cylindre de même base & de même hauteur.*

Soient ABF, quart de cercle Fig.  
inscrit dans le quarré ADBF; AF, <sup>227.</sup>  
rayon divisé en ses élémens AG,  
GK, &c. ANB, GOH, KPL, quarts  
de circonférences décrits du centre F; AD, GN, KO, RS, perpendiculaires sur le rayon AF.

Que le quarré ADBF & le quart de cercle ANBF tournent sur l'axe BF: les perpendiculaires AD, GN, KO, &c. décriront des couches cylindriques qui feront le Cylindre ADEC, moins le Cône DFE de même base & de même hauteur, qui est le tiers du Cylindre \*. Les quarts de cir- <sup>\* N.</sup>

Bb ij

370.

conférence ANB, GOH, KPL, &c. décriront les couches sphériques ABC, GHI, KLM, &c. qui feront la demi-Sphère ABCF, & qui feront en même nombre que les couches cylindriques, puisque le nombre des unes & des autres sera mesuré par celui des points ou des élémens du rayon AF. Enfin les rayons AF, GF, KF, &c. décriront par leurs extrémités AG, GK, KR, des circonférences qui feront les bases des couches cylindriques & des couches sphériques.

Cela posé, 1°. A cause des Triangles semblables DAF, \* N. NGF, OKF, &c. \* les hauteurs  
 433. AD, GN, KO, &c. des couches cylindriques, sont entr'elles comme les rayons AF, GF, \* N. KF \*; & les circonférences qui  
 450. sont les bases de ces couches, sont aussi comme les rayons AF, \* N. GF, KF; qui les ont décrites \*:  
 265.

donc les couches cylindriques sont en raison doublée de celles des rayons, ou comme les carrés des rayons ou des circonférences (a).

2°. On peut réduire les couches sphériques en Triangles qui aient pour bases des portions semblables dans les circonférences décrites par les rayons  $AF$ ,  $GF$ ,  $KF$ , & dont la hauteur soit exprimée par les quarts de circonférences  $ANB$ ,  $GOH$ , &c.

Dans ces Triangles, les bases étant arcs semblables, seront comme les rayons  $AF$ ,  $GF$ ,  $KF$  \*, \* N. 2. 6. & les côtés qui exprimeront les hauteurs, se trouvant égaux à des arcs  $ANB$ ,  $GOH$ ,  $KPL$ , qui sont aussi comme ces mêmes rayons, ces Triangles seront aussi en raison doublée des rayons: donc les couches sphériques composées de ces Triangles, seront en raison dou-

(a) Calcul Littéral, N. 183.

blée des rayons, comme les couches cylindriques : donc les couches sphériques & les couches cylindriques sont proportionnelles \* , les raisons égales à une troisième étant égales entr'elles : donc les cylindriques sont toutes plus grandes ou plus petites que les sphériques correspondantes , ou toutes égales.

\* N.  
104.

Or les cylindriques ne sont ni toutes plus grandes , ni toutes plus petites : autrement , les deux tiers AFD, CFE du cylindre vaudroient plus ou moins que la demi-Sphère ABCF de même base & de même hauteur ; puisque toutes les couches cylindriques , prises ensemble, font le Cylindre ADEC moins le cône DFE, c'est-à-dire , les deux tiers du Cylindre ADEC, & que toutes les couches sphériques , prises ensemble , font la demi-Sphère ABCF, qui est aussi les deux tiers du même Cylindre.

ADEC : donc toutes les cylindriques sont égales aux sphériques correspondantes : donc la première est égale à la première : donc la première couche cylindrique étant la Surface du Cylindre ; & la première couche sphérique , la Surface de la demi-Sphère ; la Surface de la demi-Sphère est égale à la Surface du Cylindre de même base & de même hauteur.

De-là , la Surface de la Sphère est égale à celle du Cylindre de même base & de même hauteur.

### PROPOSITION. VII.

396. *La Surface de la demi-Sphère est le produit de la circonférence du grand cercle qui en est la base , par le rayon.*

La Surface de la demi-Sphère vaut la Surface d'un Cylindre de même base & de même hauteur\* :  
 or le produit de la circonférence  
 du grand cercle de la demi-Sphère

\* N.

395.

## 298 XVI. ENTRETIEN

re par le rayon, est égal à la Surface d'un Cylindre de même base & de même hauteur; puisque la Surface du Cylindre est la circonférence de sa base, prise autant de fois qu'il y a de points dans l'axe

\* N. égal au rayon \*.

347.

## PROPOSITION VIII.

397. *La Surface de la demi-Sphère vaut deux fois l'aire de son grand cercle.*

Cette Surface vaut celle d'un Cylindre qui a pour base le grand

\* N. cercle, & pour hauteur le rayon \* :

395. or la Surface de ce Cylindre vaut

\* N. deux fois l'aire de sa base \*.

346.

## PROPOSITION IX.

398. *La Surface de la Sphère est quadruple de son grand cercle.*

La Surface de la Sphère est double de la Surface de la demi-Sphère: or la Surface de la demi-Sphère vaut deux fois celle de son grand

cercle \*, donc la Surface de la \* N.  
Sphère est quadruple de son grand <sup>397.</sup>  
cercle.

De-là, 1°. La Surface du Cy-  
lindre, étant égale à celle de la  
Sphère inscrite \*, vaut quatre \* N.  
fois le grand cercle de la Sphère. <sup>395.</sup>

2°. Comme les deux bases du  
Cylindre sont égales, chacune,  
au grand cercle de la Sphère, la  
Surface totale du Cylindre est à  
celle de la Sphère, comme 6 à 4,  
ou 3 à 2.

3°. La Surface d'une Sphère  
vaut un cercle dont le diamètre  
soit double du diamètre de la  
Sphère: car la Surface d'une Sphé-  
re est quadruple d'un cercle qui a  
pour diamètre celui de la Sphère\*. <sup>\* N.  
398.</sup>

Or un cercle qui a un diamé-  
tre double, est quadruple, puis-  
que les cercles sont comme les  
quarrés des rayons, & par con-  
séquent des diamètres\*. <sup>\* N.  
272.</sup>

EUDOXE. Voulez-vous, Ari-

300 XVI. ENTRETEN.

ste , que nous essayons de trouver la Surface de la Sphère par une autre route ?

*ARISTE.* Je vous suis , Eudoxe ; dans cette autre voye.

*EUDOXE.* Traçons une figure.

*Fig.*  
228. Soient *S* , Sphère inscrite au Cylindre *ABCD* ;  $FP = CE$  , les deux tiers de la hauteur *FG* du Cylindre, c'est-à-dire, du diamètre de la Sphère *S*.

1°. Le Cylindre *CEHD* est les deux tiers du Cylindre *CABD* \* ,  
339. puisque *FP* est les deux tiers de *FG*. Ainsi la Sphère *S* est égale au

\* *N.* Cylindre *CEHD* \* :  
388.

2°. La Sphère *S* vaut un Cône qui ait pour base la Surface & pour hauteur le rayon *FS* de la  
\* *N.* Sphère *S* \* .  
389.

D'ailleurs , ce Cône vaut un Cylindre *IKLM* qui ait pour base la base du Cône , ou la Surface de la Sphère , & pour hauteur le tiers  
\* *N.* *FN* du rayon *FS* \* , le Cône  
370.



SUR LA GÉOMÉTRIE. 301  
étant le tiers d'un Cylindre de  
même base & de même hauteur.

Donc le Cylindre IKLM =  
CEHD = S.

3°. FP, qui est les deux tiers  
de la hauteur FG du Cylindre  
CABD, vaut le rayon FS, plus  
le tiers SP du rayon, & FN n'est  
que le tiers du rayon; par consé-  
quent la hauteur FP du Cylindre  
CEHD est quadruple de la hau-  
teur FN du Cylindre IKLM.

Or dans deux Cylindres égaux;  
mais de hauteurs inégales & de  
bases inégales, les bases sont ré-  
ciproques aux hauteurs\*.

Donc la base du Cylindre IK-  
LM est quadruple de la base du  
Cylindre CABD: donc la surface  
de la Sphère S, est quadruple de  
la base du Cylindre CABD, la-  
quelle est égale au grand cercle  
de la Sphère S.

Ainsi la Surface de la Sphère  
est égale à un cercle qui ait pour

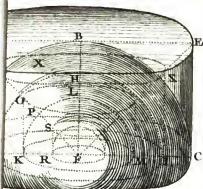
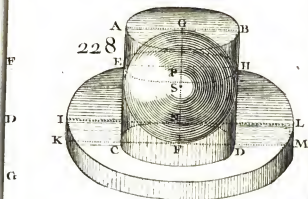
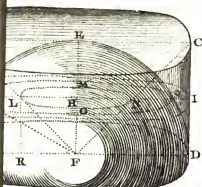
rayon le diamètre de la Sphère : car le cercle qui a pour rayon le diamètre de la Sphère est quadruple du grand cercle de la Sphère , les cercles qui ont un rayon double , étant quadruples\*.

- N. 272. Enfin , la Surface de la Sphère inscrite au Cylindre est égale à la Surface du Cylindre , puisque la Surface du Cylindre est quadruple aussi de celle de la base : car lorsque la hauteur du Cylindre est égale au rayon de la base , la Surface du Cylindre est double de celle de la base \* : donc la hauteur du Cylindre étant double du rayon , la Surface du Cylindre fera quadruple de celle de la base.

ARISTE. Cette manière de mesurer la Surface d'une Sphère me paroît précise & nette.

399. EUDOXE. Et je m'apperçois que nous touchons enfin à la mesure de la Surface de la Terre.

ARISTE. D'abord on convient





que la Terre est ronde, ou à peu près : aussi de quelque côté que l'on aille, après 25 lieues, l'on voit un nouveau degré du Ciel, ou du grand cercle céleste, où l'on se trouve. D'ailleurs, plusieurs observations astronomiques donnent 9000 lieues à la circonférence de ce grand cercle, ou 25 lieues à chaque degrés.

Supposant la Terre ronde, & la circonférence de son grand cercle de 9000 lieues ;

1°. Je prens la troisième partie de la circonférence du grand cercle ; & c'est le diamètre, à peu près\*.

2°. Prenant la moitié du diamètre, j'ai le rayon\*.

3°. Je multiplie la moitié de la circonférence par le rayon ; & le produit est le grand cercle de la Terre\*.

Enfin, j'aurai dans le quadruple de ce grand cercle la surface de Terre\*.

\* N.

281.

\* N. 55.

\* N.

277.

\* N.

298.

Calculons , 1°. La circonférence du grand cercle supposée de 9000 lieuës , le diamètre est de 3000 , environ : car le diamètre est la troisième partie de la cir-

\* N. conférence , un peu moins \*.

p81. 2°. Le rayon , moitié du diamètre est donc de 1500 lieuës , un peu moins. Pour parler plus nettement , supposons - le de 1500 lieuës ?

3°. Puisque la circonférence est de 9000 lieuës par l'hypothèse , la moitié est 4500 : donc si l'on multiplie 4500 par 1500 , valeur du rayon , le produit sera le grand cercle.

Quel est le produit de 4500 par 1500 ? .... 6750000 : donc l'aire du grand cercle contient six millions , sept cens cinquante mille lieuës quarrées.

Donc la Surface de la Terre, valant quatre fois son grand cercle , vaut quatre fois 6750000 lieuës quarrées.

Or

Or quatre fois 675 0000 font ...  
27 000 000.

Donc la Surface de la Terre  
contient environ 27 millions de  
lieuës quarrées.

400. *Déterminerons-nous la soli-  
dité même de la Te re?*

EUDOXE. Vous vous y êtes en-  
gagé, ce me semble.

ARISTE. Hé bien, connoissant  
le grand cercle de la Terre & son  
diamètre \* , jè multiplie le cer- \* N.  
cle par le diamètre; & j'ai un Cy- 398  
lindre de base égale au grand  
cercle de la Terre, & de même  
hauteur.

2°. Je prens les deux tiers de  
ce Cylindre: & c'est la solidité de  
la Terre \*, puisque la Sphère est \* N.  
les deux tiers d'un Cylindre qui a 388.  
pour base le grand cercle de la  
Sphère, & même hauteur.

Ainsi, comme l'aire du grand  
cercle est de 675 0000 lieuës quar-  
rées, & le diamètre de 3000 dans

l'hypotèse ; le produit de 6750000 par 3000 fera la solidité du Cylindre. Quel est ce produit ? . . . . .  
20 milliards , deux cens cinquante millions.

Donc la Terre qui est les deux  
\* N. tiers de ce Cylindre \* contien-  
388. dra . . . . 13 milliards , cinq cens millions , ou environ , de lieues cubiques.

EUDOXE. Si l'on multiplie d'abord le grand cercle de la Terre par les deux tiers de son diamètre , ne trouvera-t-on pas la même chose ?

ARISTE. Sans doute , puisqu'un Globe est le produit de son grand cercle par les deux tiers de son  
\* N. diamètre \* ; & l'opération sera  
388. plus courte.

Comparons maintenant les Surfaces de deux Sphères.



## PROPOSITION X.

401. *Les Surfaces de deux Sphères sont en raison doublée de celle de leurs rayons.*

Les surfaces de deux Sphères sont comme les grands cercles dont elles sont quadruples\*, puis-  
 que les tous sont comme leurs parties semblables (a) : or les cer-  
 cles sont en raison doublée de leurs rayons, ou comme les quar-  
 rés de ces rayons\*.

Ainsi les Surfaces des Sphères  
 sont comme les quarrés des rayons.

402. *EUDOXE. Soient deux Boules B & C, dont la première a le rayon double : quelle est la raison de leurs Surfaces ?*

*ARISTE.* 1°. Le rayon de B est au rayon de C, comme 2 à 1. ::

(a). Calcul Littéral, N. 99.

donc 2, 1 sont les exposans des rayons.

2°. Les Surfaces étant en raison doublée de celle des rayons, je double la raison de leurs exposans ; & j'ai 2, 1 ; 2, 1 (a).

3°. Je multiplie les antécédens par les antécédens & les conséquens par les conséquens ; & les produits ou quarrés 4, 1, sont les exposans de la raison doublée des Surfaces ; c'est-à-dire, que la première est quadruple de la seconde.

EUDOXE. En un mot, puisque les deux Surfaces sont comme les quarrés des rayons 2, 1 ; elles sont entr'elles comme 4 à 1.

403. Mais, Ariste, je donne au Soleil un rayon centuple de celui de la Terre, conformément aux Observations. Il s'agit de mesurer la Surface de cet Astre.

ARISTE. Je prendrai donc d'a-

(a) Calcul Littéral, N. 183.

bord les exposans des rayons des deux Boules, c'est-à-dire, du Soleil & de la Terre. Puis quarrant les exposans, j'aurai dans les quarrés la raison des Surfaces \* & connoissant déjà la Surface de la Terre <sup>401.</sup> <sup>\* N<sub>2</sub>.</sup> je connoîtrai celle du Soleil. <sup>\* N<sub>1</sub>.</sup>

Calculons : 1°. le rayon du Soleil est centuple dans l'hypothèse : donc la raison du rayon au rayon a pour exposans, 100, 1.

2°. 10000, 1, quarrés de ces exposans 100, 1, sont les exposans des Surfaces : donc la Surface du Soleil, étant comme 10000 à 1, vaut dix-mille fois celle de la Terre.

Mais la Surface de la Terre comprend 27 millions de lieues quarrées.

Donc la Surface du Soleil contient 10000 fois 27 millions de lieues quarrées.

*EUDOXE. Enfin, il faut mesurer la solidité même du Soleil.*

# 310 XVI. ENTRETEN

ARISTE. Hé bien, 1°. Connoissant les demi-diamètres du Soleil & de la Terre \*, je prendrai les exposans de ces rayons.

399. 2°. Je cuberai les exposans ; & les cubes seront les exposans.

\* N. de la raison des deux Sphères \*.  
399. Ainsi, comme je connois la so-

\* N. lité du Globe terrestre \*, je con-  
400. noîtrai celle du Soleil.

Les exposans des rayons sont

\* N. 100, 1 \*.  
403. Cubons d'abord 100, puis 1 ;

les cubes sont 1000000, 1 (a) : donc la solidité du Soleil est à celle de la Terre, comme 1000000 à 1. Par conséquent le Soleil est un million de fois aussi grand que la Terre.

Or la Terre comprend 13 milliards, cinq cens millions de  
\* N. lieuës cubiques, ou environ \*.  
400.

Donc le Soleil contient un million de fois 13 milliards, cinq

(a) Calcul Littéral, N. 34.

**SUR LA GÉOMÉTRIE. 311**  
cens millions de lieuës.

*EUDOXE.* Après cela , puis-je m'empêcher, Ariste, de vous demander quelques entretiens sur la Trigonométrie ?

*ARISTE.* Votre plaisir , ce semble, Eudoxe, est de faire le mien ; le même Sytème d'Entretiens nous retracera donc d'autres idées.



**ENTRETIENS**




ENTRETIENS  
MATHÉMATIQUES  
SUR LA  
TRIGONOMÉTRIE  
RECTILIGNE.

---

I. ENTRETIEN.

*Sur la valeur des Sinus & des côtés  
des Figures rectilignes inscrites  
au Cercle.*

ARISTE.  O U S voyez ;  
Eudoxe , mon  
Cabinet décoré  
& tapissé , pour ainsi dire , d'un  
goût nouveau.

*Tome II.*

D d

*EUDOXÈ.* C'est la Trigonométrie, ce semble, représentée sous des traits réguliers, en figures artistement faites & rangées de même.

*ARISTE.* Il y a des personnes qui sont ravies de se voir environnées d'ornemens riches, de figures travaillées avec toute la délicatesse de l'art, mais qui ne leur remettent devant les yeux que la Fable, le mensonge, & les rêveries de la Poësie. Ce n'est pas là mon goût; j'aime à voir autour de moi des figures plus simples, mais qui ne me rappellent que des vérités incontestables.

*EUDOXE.* Et vous connoissez mon goût, il y a long-temps: vous me ferez donc part de ces vérités dans l'ordre où elles s'offriront à votre esprit.

*ARISTE.* Les Définitions & les Propositions suivies nous conduiront lentement, mais sûrement,



SUR LA TRIGON. RECTIL. 315  
à des Problèmes également curieux & utiles.

### DEFINITIONS.

1. La Trigonométrie rectiligne est l'art de mesurer des grandeurs par la mesure des angles & des côtés des Triangles rectilignes.

2. Complément d'un angle ou *Fig. 1.* d'un arc, est la quantité  $AE$ , dont un arc  $AC$  est plus petit que le quart de cercle  $CE$ .

Complément au demi-cercle, ou *supplément* est la quantité  $AF$ , dont un arc  $AC$  est moindre que le demi-cercle  $CAF$ .

3. Sinus droit  $AB$  d'un angle  $ADC$ , ou d'un arc  $AC$ , est une perpendiculaire tirée d'une extrémité  $A$  de l'arc sur le diamètre ou le rayon qui passe par l'autre extrémité  $C$ , ou la moitié de la corde qui soutient un arc double  $(a)$ .

$(a)$  Géométrie , N. 87.

Ddij

4. Sinus verse , est la partie BC du rayon comprise entre l'extrémité C de l'arc AC & son Sinus droit AB.

5. Sinus AI du complément , est le Sinus propre de l'arc AE , qui est complément au quart de  
\* N. 2. cercle \*.

6. Sinus total ED est le Sinus du quart de cercle CE , ou de l'angle droit CDE , & par conséquent le rayon même. Que l'angle ADC croisse , le côté AD s'approchant de ED : le Sinus AB croîtra , jusqu'à ce que confondu avec AD dans ED , il soit le rayon même ED : mais avançant de ED vers F , il diminueroit (a) ; car les moitiés de cordes qui se trouvent plus éloignées du centre , sont plus petites : ainsi , le Sinus total est le plus grand des Sinus.

7. La Tangente CH d'un an-  
(a) Géométrie , N. 65.

SUR LA TRIGON. RECTIL. 317  
gle ADC ou d'un arc AC compris entre deux rayons qui forment l'angle, est une perpendiculaire tirée sur l'extrémité C d'un rayon CD & terminée par l'autre rayon prolongé DAH.

8. La Sécante de l'arc AC ou de l'angle ADC est le côté prolongé DAH qui va terminer la Tangente CH.

EG est la Tangente du complément; & DG, la Sécante du complément.

9. Enfin, le Sinus total, ou le rayon se divise d'ordinaire en 100000 parties, ou en 10000000, qui servent à déterminer la valeur des côtés des figures rectilignes inscrites au cercle, des Sinus, des Tangentes, des Sécantes.

Le diamètre double du rayon, sera double du Sinus total.

#### PROPOSITION I.

10. *Les quarrés du Sinus droit*

D d iij

*d'un arc & du Sinus de son complément sont , pris ensemble , égaux au carré du rayon.*

Fig. 2. Soient AD, Sinus droit de l'arc AE ; & AB Sinus du complément AC ; AF, rayon.

1°. L'angle BFD est droit ayant pour mesure le quart de cercle CE.

2°. Les deux angles B & D le sont , puisqu'ils sont faits par les perpendiculaires , ou les Sinus

\* N. 3. AB, AD \* ; & par conséquent l'angle BAD l'est : car le Quadrilatere BD vaut 4 angles droits (a) : donc , c'est un Rectangle (b).

Ainsi  $AB = DF$  , & le Triangle DAF est un Triangle rectangle , dont AF est l'hypoténuse.

Cela posé ; je dis que les carrés de AD , AB valent celui de AF.

Les carrés de AD , DF va-

(a) Géométrie , N. 175.

(b) Ibid. N. 170.

SUR LA TRIGON. RECTIL. 319  
lent le quarré de AF (a).

Or  $AB = DF$  : donc les quarrés de AB, AD valent celui de AF.

EUDOXE. En un mot,  $\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AF}^2$  : or  $AB = DF$  : donc  $\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AF}^2$ .

II. ARISTE. De-là, si dans Fig. 2.  
un Triangle rectangle DAF, on prend l'hypoténuse AF pour rayon, les côtés AD, DF, sont Sinus des angles opposés : car  
1°. AD est Sinus de l'angle AFE\*. \* N 3.  
2°.  $DF = AB$ , Sinus de l'angle AFB = DAF alterne (b).

Donc DF est Sinus de l'angle DAF.

I 2. EUDOXE. Connoissant l'hypoténuse AF, prise pour rayon, avec un côté DF d'un Triangle rectangle DAF, vous trouverez bientôt l'autre côté AD.

(a) Géométrie, N. 204.

(b) Ibid. N. 101.

*ARISTE.* Du carré de l'hypoténuse  $AF$ , j'ôte le carré du côté connu  $DF$  : reste le carré de l'inconnu  $AD$  (a).

Enfin, j'extrais la racine du carré de l'inconnu  $AD$  (b), & la racine est la valeur de l'inconnu  $AD$ .

*EUDOXE.* En un mot, de  $AF^2$  ôtez  $DF^2$  : reste  $AD^2$ ; &  $\sqrt{AD^2} = AD$ , puisque  $AD \times AD = \overline{AD}^2$  (c).

13. De-là, connoissant le Sinus droit  $AD$ , on a le Sinus  $AB = DF$  du complément; car  $AF^2 - AD^2 = DF^2 = AB^2$ ; &  $\sqrt{AB^2} = AB$ .

14. Mais connoissant les deux côtés  $AD$ ,  $DF$ , il faut trouver l'hypoténuse.

\*N.12. *ARISTE.*  $\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AF}^2$  \* :

(a) Géométrie, N. 204.

(b) Calcul Littéral, N. 74.

(c) Ibid., N. 65.

ainfi,  $\sqrt{AD^2 + DF^2} = AF$ .

De-là, 1°. Je prens la fomme des quarrés des côtés AD, DF ; & c'est le quarré de l'hypoténuse AF (a).

2°. J'extrais la racine de cette fomme ; & c'est l'hypoténuse même.

## PROPOSITION II.

15. Dans le quart de cercle AH, Fig. 31 le Sinus droit AB d'un arc AC est moyen proportionnel entre la moitié AD du rayon & le Sinus versé AE de l'arc double ACG.

Soit FC perpendiculaire coupant la corde AG & l'arc AGC par le milieu B (b).

Je dis que  $\div AD. AB. AE$ .

Les angles ABF, AEG, font droits, puisque AB, EG font Sinus \* ; & l'angle en A est commun ; donc les Triangles AFB, AEG font proportionnels (c).

(a) Géom. N. 204. (b) Ib. 61. (c) Ib. 150.

Donc  $AF. AB :: AG. AE$ .

Donc  $AF - DF. AB :: AG - BG. AE$ ; les moitiés étant comme les tous.

Or  $AF - DF = AD$ , &  $AG - BG = AB$ .

Donc  $\div AD. AB. AE$ .

16. EUDOXE. *Après cela, connoissant le rayon AF avec le Sinus droit AB d'un arc, vous trouverez, ce semble, le Sinus verse AE d'un arc double ACG, & le Sinus droit EG de l'arc double.*

ARISTE. 1°. Puisque  $\div AD$ :

$$*N.15. AB. AE*, \frac{\overline{AB}^2}{AD} = AE(a).$$

Ainsi, divisant le quarré du Sinus droit AB de l'arc soudouble par la moitié du rayon, j'aurai le Sinus verse AE de l'arc double ACG.

2°. Connoissant AE & AB, moitié de AG, je connois AE & AG, hypoténuse.

(a) Calcul Littéral, N. 139.



Or dans un Triangle rectangle, dès que l'on connoît l'hypoténuse & un côté, l'on connoît l'autre côté \*.

\*N. 125

Ainsi je connois le Sinus droit EG de l'arc double.

De-là, connoissant le Sinus droit EG d'un arc, comme on connoît l'arc AG, on en connoît la moitié AC, & par conséquent son Sinus droit AB, qui donne le Sinus verse AE de l'arc double ACG : ainsi connoissant le Sinus EG d'un arc ACG, on aura son Sinus verse.

### PROPOSITION III.

17. *Le quarré du côté AB d'un Triangle équilatéral ABC inscrit au cercle, vaut trois fois le quarré du rayon, ou du demi-diamètre.*

Soit AE diamètre, qui coupant la corde BC par le milieu F, coupe de même l'arc BEC troisième.

partie du cercle (a) : donc la corde BE, côté d'un Exagone, vaut le demi-diamètre (b).

Cela posé ; je dis que le quarré de AB vaut trois fois celui de BE.

Les quarrés de AB & de BE valent, pris ensemble, celui de AE (c), puisque l'angle ABE inscrit & appuyé sur le diamètre est droit.

Or le quarré de AE est quadruple de celui de BE, le quarré d'une ligne double étant quadruple (d) : donc les quarrés de AB & de BE sont, pris ensemble, quadruples de celui de BE.

Mais le quarré de BE ne vaut que le quarré de BE :

Donc le quarré de AB est triple du quarré de BE.

EUDOXE. En un mot,  $AB^2 = 3BE^2$ .

(a) Géométrie, N. 58.

(b) Ibid. N. 238.

(c) Ibid. N. 204.

(d) Ibid. N. 216.

$BE^2 = AE^2$ , quarré de l'hypoténuse :

Or  $\overline{AE}^2 = 4\overline{BE}^2$  : donc  $\overline{AB} + \overline{BE}^2 = 4\overline{BE}^2$ .

Mais  $\overline{BE}^2 = \overline{BE}^2$  précisément :  
donc  $\overline{AB} = 3\overline{BE}$ .

18. Et cela vous donne la valeur du côté AB d'un Triangle équilatéral.

ARISTE. Ce côté AB est la racine d'un quarré qui vaut trois fois le quarré du rayon\*.

\* N. 174

Ainsi après avoir fixé la somme des trois quarrés du rayon , je prens la racine de cette somme (a); & c'est la valeur du côté AB.

$\sqrt{3}\overline{BE}^2 = AB$ , puisque  $AB = \sqrt{\overline{AB}^2} = 3\overline{BE}^2$ .

#### PROPOSITION IV.

19. Le côté AB du quarré ABCD Fig. 5:

(a) Calcul Littéral, N. 73.

*inscrit au cercle, est la racine de deux fois le quarré du rayon.*

Soient AC, BD, deux diamètres qui se coupent à angles droits au centre E. Ainsi, le Triangle ABE est rectangle; & les côtés EA, EB sont rayons.

Et je dis que AB est la racine de la somme des quarrés de EA, EB.

Le quarré de l'hypoténuse AB vaut la somme des quarrés des côtés EA, EB (a) : or AB est la racine du quarré de AB, puisque  $AB \times AB$  donne le quarré de AB (b).

Donc AB est la racine de la somme des quarrés de EA, EB.

20. EUDOXE. Ainsi,  $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$  (a) : or  $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$  (b) :

Donc  $AB = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2}$ .

*Et vous alliez trouver le côté du*

(a) Géométrie, N. 204.

(b) Calcul Littéral, N. 19.

*quarré inscrit au cercle.*

ARISTE. Je prendrai la racine de la somme de deux quarrés du rayon ; & ce sera le côté du quarré \*.

\*N. 19.

## PROPOSITION V.

21. *Si le grand segment d'une ligne coupée en moyenne & extrême raison, est le côté d'un Exagone ; le petit segment est le côté d'un Décagone inscrit au même cercle.*

Soit AB divisée de la sorte en Fig. 6, C (a) ; AC, côté d'un Exagone, ou égal au rayon  $EB = EC = AC$  (b).

Je dis que BC, petit Segment, est côté d'un Décagone inscrit.

1°. Les Triangles EBC, ECA sont isocèles, puisque  $EB = EC = AC$  (c).

2°.  $\therefore AB. AC. BC$  (d) : donc

(a) Géométrie, N. 162.

(b) Ibid. N. 238.

(c) Ibid. N. 120.

(d) Ibid. N. 162.

$$\therefore AB \cdot EB = AC \cdot BC.$$

Donc les Triangles ABE, EBC, sont semblables (a) ayant un angle commun  $\angle ABE = \angle CBE$ , & les côtés qui le comprennent, proportionnels.

Donc le Triangle ABE est isocèle aussi, &  $\angle ABE = \angle AEB$ ,  $\angle CAE = \angle BEC$ .

Cela posé; l'angle extérieur  $\angle BCE = \angle AEC + \angle CAE = \angle AEC$  (b).

Donc l'angle BCE, & par conséquent  $\angle CBE = \angle BCE$  est double de l'angle  $\angle CAE = \angle BEC$ : donc les angles BCE & CBE sont doubles, chacun, de BEC: ainsi BEC est de 36 degrés (c); car chacun des angles de la base étant double de celui du sommet, l'angle du sommet doit être de 36 degrés; & par conséquent la corde BC est la corde d'un arc de 36 dé-

(a) Géométrie, N. 160.

(b) Ibid. N. 129.

(c) Ibid. N. 164.

grés;

grés, donc le côté BC est le côté d'un Décagone inscrit (a).

*EUDOXE.* En effet, l'angle extérieur CED, étant égal aux intérieurs opposés BCE (b), CBE, doubles, chacun, de l'angle BEC, est quadruple de BEC: donc l'arc  $CD = 4CB$ ; donc la corde BC soutenant la cinquième partie de la demi-circonférence, ou la dixième de la circonférence, est côté du Décagone.

*ARISTE.* Et bientôt, nous trouverons au même temps les côtés du Décagone & du Pentagone.

#### PROPOSITION VI.

22. *Le quarré du côté du Pentagone régulier inscrit au cercle, vaut les quarrés des côtés de l'Exagone & du Décagone du même cercle.*

Soient ABCDEA, Pentagone inscrit; AB, côté du Pentagone;  $AH = BH$ , côté du Décagone; FH, rayon coupant le

(a) Géom. N. 141. (b) Ibid. N. 119.

côté AB, & par conséquent l'arc AHB, par le milieu, I, H (a); FK, rayon coupant le côté AH & par conséquent l'arc AKH, par le milieu L, K; BF rayon égal au côté de l'Exagone (b); AFG, diamètre coupant le côté CD, & par conséquent l'arc CGD, par le milieu, N, G.

Je dis que  $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{AH}^2$ .

1°. L'angle inscrit BAF = BAG, vaut l'angle au centre BFM, qui a pour mesure l'arc BH, moitié de BC, & l'arc HK, moitié de CG = AKH (c); & l'angle ABF est commun: donc les deux Triangles ABF, MBF sont semblables, & leurs côtés homologues sont proportionnels (d).

Donc  $\therefore$  AB. BF. BM : donc

(a) Géométrie, N. 58. & 62.

(b) Ibid. N. 238.

(c) Ibid. N. 114.

(d) Ibid. N. 133. & 150.



$$AB \times BM = \overline{BF}^2 (a).$$

2°. Dans les Triangles AML, HML, le côté  $AL = HL$ ; le côté LM est commun, & les angles compris sont égaux étant droits en L, par la construction: donc les deux Triangles sont égaux (b): ainsi, l'angle  $LAM = LHM$ .

Or l'angle commun  $LAM = HBA$ : car puisque le côté  $BH = AH$ , le Triangle ABH est isocèle: donc les deux Triangles ABH, AHM sont semblables ayant les angles égaux; & par conséquent  $\therefore AB. AH. AM ::$  donc  $AB \times AM = \overline{AH}^2$ .

Ainsi,  $\therefore AB \times BM = \overline{BF}^2$ , &  $AB \times AM = \overline{AH}^2$ :

$$\text{Or } AB \times BM + AB \times AM =$$

(a) Calcul Littéral, N. 136.

(b) Géométrie, N. 136.

$AB \times AB$ , ou  $\overline{AB}^2$ :

$$\text{Donc } \overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{AH}^2.$$

EUDOXE. J'attens ici la résolution d'un Problème que vous avez annoncée.

ARISTE. Au lieu d'un Problème, je vois une foule de Problèmes qui viennent s'offrir à la suite les uns des autres.

EUDOXE. Hé bien, c'est à vous de les résoudre dans le même ordre.

ARISTE. Essayons donc de le faire.

### PROBLÈME I.

23. *Trouver les côtés d'un Décagone & d'un Pentagone.*

Fig. 3. Soient D, centre du cercle BAC; BC, diamètre; DA, perpendiculaire sur le milieu D du diamètre BC; E, milieu du rayon CD=DA; EF=EA; enfin, AF.

J'aurai dans DF le côté du Décagone inscrit; & dans AF, le côté du Pentagone.

Car 1°. La ligne DF étant ajoutée à CD divisée par le milieu E, le rectangle de CF par DF, avec le carré de ED, est égal au carré de EF, ou de  $EA = EF$  (a), & par conséquent aux carrés de ED, DA (b).

Otez le carré commun de ED : reste le rectangle de CF par DF, égal au carré de  $DA = CD$  rayon connu : donc  $\div$  CF. CD. DF (c).

Donc CF est divisée en moyenne & extrême raison au point D (d).

Or le grand Segment CD étant moyen, ou côté de l'Exagone; DF, petit segment, est côté du Décagone inscrit au même cercle\*.

\*N. 276.

Ainsi, divisant par CF le carré du rayon CD, j'ai

(a) Géométrie, N. 221.

(b) Ibid N. 204.

(c) Calcul Littéral, N. 141.

(d) Géométrie, N. 162.

# 334 I. ENTRETIE N

dans le quotient la valeur de  $DF(a)$ , ou celle du côté du Décagone.

Mais pour diviser par  $CF$  le quarré du rayon  $CD$ , il faut connoître  $CF$ , ce qui est facile. Car  $CF = CE + EF = EA$  : or  $EA^2 = AD^2 + ED^2$ ; &  $AD = CD$ ,  $ED = \frac{1}{2} CD$  : donc, &c.

2°. Le quarré du côté du Pentagone est égal aux quarrés des côtés de l'Exagone & du Décagone inscrits au même cercle \* : or le quarré de  $AF$  est égal aux quarrés de  $DA$ ,  $DF$ , (côtés connus  $(b)$ ,  $DA$  de l'Exagone,  $DF$  du Décagone) : Donc  $AF$  est le côté du Pentagone.

Ainsi, prenant la racine du quarré de  $AF$ , ou de la somme des quarrés de  $DA$ ,  $DF$ , j'ai la valeur de  $AF$ , ou du côté du Pentagone.

(a) Calcul Littéral, N. 502.

(b) Géométrie, N. 204.

## PROBLÈME II.

24. Trouver le côté d'un Quindécagone.

AB côté du Quindécagone, *Fig. 2.* est une corde comprise entre la base du Triangle équilatéral ACD & celle du Pentagone CEFBH, inscrits au même cercle (a).

Cela posé; 1°. Connoissant AD, côté du Triangle équilatéral\*, & \*N.184. BF, côté du Pentagone\*, je con-\*N.23. nois & leurs moitiés AI, BL, Sinus droits des arcs AM, BM, & leur différence AN, qui est l'excès de AI connue sur BL connue & égale à NI.

2°.  $BO = LP$ , étant Sinus du complément BR; &  $AQ = IP = NO$ , Sinus du complément AR, je connois LP & IP\* avec \*N.134. leur différence  $LI = BN$ .

Enfin, connoissant les côtés AN, BN, du Triangle rectangle ANB, je prens la somme de leurs

(a) Géométrie, N. 243.

# 336 I. ENTRETEN

quarrés, égale au quarré de AB (a);  
& la racine de cette somme est  
AB, côté du Quindécagone.

## PROBLÈME III.

25. *Trouver la corde de 24 degrés*

Le côté du Quindécagone est  
corde de 24 degrés, puisque 24  
\*N. 24.  $\times 15 = 360$  : donc ayant ce côté \*,  
j'ai la corde de 24 degrés.

## PROBLÈME IV.

26. *Trouver le Sinus d'un arc  
de 12 degrés.*

C'est la moitié de la corde de  
\*N. 25. 24 degrés (b), corde connue \*.

## PROBLÈME V.

Fig. 10. 27. *Connoissant la corde AB d'un  
arc, trouver la corde BC du supplé-  
ment.*

Le Triangle ABC est rectan-  
gle (c) : ainsi, du quarré de AC,  
\*N. 9. diamètre connu \*, j'ôte le quarré  
de la corde connue AB : reste le

(a) Géométrie, N. 204.

(b) Ibid. N. 81.

(c) Ibid. N. 115.

quarré

SUR LA TRIGON. RECTIL. 337  
 quarré de BC (a) ; & la racine de  
 ce quarré est BC, corde du sup-  
 plement.

En un mot,  $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$  ;  
 &  $\sqrt{\overline{BC}^2} = BC$ .

## PROBLÈME VI.

28. *Connoissant la corde d'un  
 arc , trouver celle qui soutient la  
 moitié de l'arc.*

Soit EB, rayon perpendiculai- Fig. I r.  
 re sur la corde AD connue, la  
 coupant par le milieu F, aussi-  
 bien que l'arc ABD (b). Il faut  
 trouver AB, corde de l'arc ACR.

Je tire EA : voilà deux rayons  
 connus, EB, EA, & deux Trian-  
 gles rectangles AFE, AFB, dont  
 je connois le côté commun AF.

Cela posé ; 1°. de  $\overline{EA}^2$  connu ,

(a) Géométrie , N. 204.

(b) Ibid. N. 58.

j'ôte  $\overline{AF}^2$  : reste  $\overline{EF}^2$  (a), dont la racine est EF.

2°. Connoissant EF, je connois FB, reste du rayon.

Enfin, connoissant AF & FB, j'ai dans la somme de leurs carrés, celui de l'hypoténuse AB; & la racine de cette somme est AB.

## PROBLÈME VII.

*Fig. 12.* 29. Connoissant la corde AB d'un arc ACB, trouver la corde AD d'un arc double ACD.

Le Triangle BAE est rectangle (b).

Ainsi, 1°. Du carré de BE, double rayon connu, j'ôte le carré de AB : reste le carré de AE, ou  $\overline{AE}^2$ , dont la racine est AE; & je connois AE.

2°. Le côté  $BD = AB$ , & DE

(a) Géométrie, N. 204.

(b) Ibid. N. 115.



$=AE$ , connus (a), les arcs égaux donnant des cordes égales ; & je connois les côtés  $BD$ ,  $DE$ .

3°. Multipliant  $DE$  par  $AB$ , &  $AE$  par  $BD$ , j'ai dans le produit total la valeur du produit de  $AD$  par  $BE$ , puisque dans le Quadrilatere inscrit au cercle, le rectangle des deux Diagonales vaut les deux rectangles des côtés opposés (b).

Enfin, ce produit de  $AD$  par  $BE$ , je le divise par  $BE$  ; & le Quotient est  $AD$  (c).

Par la même voie, connoissant deux cordes différentes, on connoitra la corde qui soutient un arc égal aux deux arcs soutenus par les deux cordes connues.

### PROBLÈME VIII.

30. *Connoissant la corde d'un arc ; trouver la corde qui soutient une par-*

(a) Géométrie, N. 56.

(b) Ibid. N. 200.

(c) Calcul Littéral, N. 50.

*tie quelconque de cet arc.*

*Fig. 13.* Soit AB, corde de 60 degrés :  
il faut trouver AC, corde de 20  
degrés.

AC corde de 20 degrés vaut plus  
que le tiers de AB corde de 60 dé-  
grés : car les trois cordes AC, CD,  
DB, qui soutiennent, chacune, le  
tiers de l'arc ACDB, font, prises  
ensemble, une ligne plus longue  
que la corde AB (*a*) ; de plus les  
cordes ne font pas entr'elles com-  
me les arcs (*b*).

Cela posé ; 1°. Prenant le tiers  
de la corde de 60°, égale au  
\* N. 9. rayon, ou de 10000000 parties \*,  
j'ajoute à ce tiers quelques parties,  
& je suppose que la somme de  
l'addition est la valeur de la corde  
AC.

2°. Avec cette valeur de la cor-  
de AC, je cherche la corde de 40  
\* N. 29 degrés, puis de 60 \*.

(*a*) Géométrie, N. 15.

(*b*) Ibid. N. 271.

Si ma supposition est juste, il doit venir pour la corde de 60 degrés, 10000000. Vient-il plus ou moins? la supposition est trop forte ou trop foible. J'augmente ou je diminue, jusqu'à ce que je trouve, en opérant de même, 10000000 pour la corde 60°. & la supposition qui me donne cette valeur est la corde de 20 degrés, ou le tiers que je cherchois.

La même voye donnera la corde qui soutient la quatrième partie, la cinquième, &c.

### PROBLÈME IX.

31. *Connoissant la corde qui soutient un arc double, trouver le Sinus d'un arc soudouble.*

Je prens la moitié de la corde de l'arc double; & c'est le Sinus d'un arc soudouble, puisque le Sinus d'un arc est la moitié d'une corde qui soutient un arc double (a).

(a) Géométrie, N. 87.

## PROBLÉME X.

32. *Trouver les cordes de 120 degrés, de 90, de 72, de 60, de 36, de 24.*

Ces cordes sont les côtés du Triangle équilatéral, du Quarré, du Pentagone, de l'Exagone, du Décagone, du Quindécagone.

Ainsi, prenant les côtés de ces  
<sup>\*N. 18.</sup> Poligones \*, j'aurai les cordes de  
<sup>20. 9.</sup> 120 degrés, de 90, &c.  
<sup>23. 25.</sup>

## PROBLÉME XI.

33 *Trouver les Sinus de 60 degrés, de 45, de 36, de 30, de 18, de 12.*

Ces Sinus sont les moitiés des cordes doubles (a).

\*N. 32. Ainsi, connoissant les cordes \*, j'ai dans leurs moitiés, les Sinus.

Par le même principe, ayant la  
<sup>\*N. 30.</sup> corde de 20 degrés \*, j'aurai dans la moitié le Sinus de 10°.

(a) Géométrie, N. 87.

PROBLÈME XII.

34. Connoissant le Sinus AB d'un *Fig. 14.*  
arc AC, trouver le Sinus DE d'un  
arc double ACD.

1°. Les Sinus égaux AB, CH  
du même arc  $AC = CA$ , étant  
moitiés de cordes égales (a), sont  
également éloignés du centre F  
dans tous leurs points correspon-  
dants (b) : donc  $BF = HF = CG$ ,  
Sinus du complément, connu dès  
que l'on connoît le Sinus droit \* : \* N. 13.  
ainsi, je connois BF.

2°. Je connois AF rayon \* & \* N. 9.  
la corde AD double du Sinus AB  
donné.

3°. Les Triangles ABF, ADE  
sont équiangles ayant un angle  
droit, chacun, en B, E, & un  
angle commun A.

Cela posé ;  $AF. BF :: AD.$

(a) Géométrie, N. 37.

(b) Ibid. N. 64.

344 I. ENTRETEN  
 DE (a) ; & connoissant trois termes, AF, BF, AD de la proportion , je connois la quatrième DE (b).

### PROBLÈME XIII.

Fig. 14. 35. Connoissant le Sinus DE d'un arc double ACD , trouver le Sinus AB d'un arc soudouble AC.

1°. Connoissant le Sinus droit DE, je connois le Sinus DI du complément DK \*, & par conséquent  $EF = DI$ .

2°. Connoissant EF, je connois EA , reste du rayon connu \*.

3°. Connoissant DE & EA , je connois leurs quarrés  $\overline{DE}^2 + \overline{EA}^2$ , & par conséquent le quarré de l'hypoténuse AD , puisque  $\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EA}^2$  (c).

(a) Géométrie , N. 150.

(b) Calcul Littéral , N. 137.

(c) Géométrie , N. 204.

Enfin , j'ai dans la racine du quarré de AD , ou dans  $\sqrt{AD^2}$ , la valeur de AD , dont la moitié est AB.

## PROBLÈME XIV.

36. *Connoissant les Sinus AB, Fig. 15. CD, de deux arcs AE, AC; trouver le Sinus CF de l'arc CAE formé des deux arcs.*

Les Triangles CGD, CLD, LHF, DHI, AHB, sont semblables (a), ayant tous un angle droit en G, D, F, I, B, fait par un Sinus AB, CD, ou CF, ou par une parallele GD à une perpendiculaire FB sur un Sinus AB, avec un angle opposé au sommet L, ou commun H.

D'ailleurs, on connoît AH = EH, rayon, & BH = AM, Sinus du complément \*. Enfin, \*N. 132. connoissant le Sinus CD de l'arc

(a) Géométrie, N. 133.

AC, je prens sur le rayon connu  
 \*N.16. AH, le Sinus verse DA\*: reste,  
 DH connue.

Cela posé; 1°. AH. DH :: AB.  
 DI = GF (a) : voilà donc GF =  
 DI connue (b) : car connoissant  
 les trois premiers termes d'une  
 proportion, l'on a le quatrième.

2°. AH. BH :: DC. CG; je  
 connois donc CG, & par consé-  
 quent GF + CG. Or GF + CG  
 = CF. Ainsi, je connois CF.

### PROBLÈME XV.

*Fig. 15.* 37. Connoissant les Sinus AB ;  
 CF de deux arcs AE, CE ; trou-  
 ver le Sinus CD de leur différence  
 AC.

1°. Connoissant CF, je con-  
 nois FH = CK, Sinus du com-  
 plément CN\*. Par la même rai-  
 son connoissant AB, je connois

(a) Géométrie, N. 150.

(b) Calcul Littéral, N. 137.



SUR LA TRIGON. RECTIL. 347  
 $BH = AM$ , Sinus du complément  $AN$ .

2°.  $BH. AB :: FH. LF$  (a) :  
voilà  $LF$  connue \*, & par confé- \*N. 38.  
quent  $LC$ , reste du Sinus connu  
 $CF$ .

3°.  $AH. BH :: LC. CD$  : ainsi ,  
je connois  $CD$  (b) , Sinus de la  
différence  $AC$ .

Et tout cela nous conduit à la  
construction des Tables des Sinus.

*EUDOXE.* Aussi me reverrez-  
vous bientôt ici.

---

## II. ENTRETIEN.

*Sur les Tables des Sinus , des Tan-  
gentes & des Sécantes.*

*EUDOXE.* **L**A multitude va aux  
Thuilleries , aux  
champs Elisées ; un certain mon-

(a) Géométrie , N. 150.

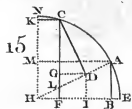
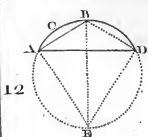
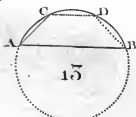
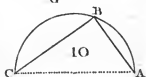
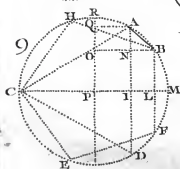
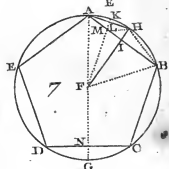
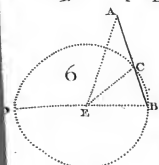
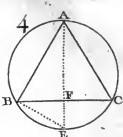
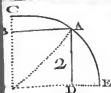
(b) Calcul Littéral , N. 137.

348 II. ENTRETEN  
de court aux Spectacles ; & mon  
goût me ramene dans votre Cabi-  
net , Ariste , pour voir votre idée  
sur ce qu'on nomme Tables des  
Sinus.

*ARISTE.* C'est vous priver , Eu-  
doxe , d'un plaisir bien sensible ,  
pour des choses qui ne flattent  
guère les sens , mais qui n'occu-  
pent pas moins l'esprit , & qui peut-  
être font couler le temps aussi  
vite. Quoiqu'il en soit , vous vou-  
lez que je dise mes idées à l'ordi-  
naire ; & je le fais.

38. D'abord , Tables des Si-  
nus , des Tangentes , & des Sé-  
cantes , sont des colonnes de chif-  
fres , dont les unes expriment com-  
bien chaque Sinus , depuis le Si-  
nus d'une minute jusqu'à celui de  
90 degrés , contient de parties du  
Sinus total , ou du rayon ; com-  
bien chaque Tangente , ou cha-  
que Sécante.

Commençons par la construc-





SUR LA TRIGON. RECTIL. 349  
tion de la Table des Sinus.

39. 1°. Faut-il trouver les Sinus des degrés depuis 1 degré jusques à 90 ? Je prens tantôt le Sinus d'un arc double \*, tantôt le <sup>\*N.34.</sup> Sinus d'un arc soudouble \*, tantôt le <sup>\*N.31.</sup> Sinus de la différence de <sup>de 35.</sup> deux arcs \*. <sup>\*N.36.</sup>

Par là, ayant par exemple, le Sinus de 10 degrés \*, & le Si- <sup>\*N.30.</sup> nus de 12 \*, j'ai d'une part les Si- <sup>de 31.</sup> nus de 20 degrés, de 40, de 80 ; de 24, de 48 ; & de l'autre, j'ai les Sinus de 5 degrés, de 6, de 3. <sup>\*N.26.</sup>

Ayant les Sinus de 5 degrés & de 3, j'ai le Sinus de 2, différence de 5 & de 3, le Sinus de 1.

Ayant les Sinus de 1, 2, 3, 4, j'ai les Sinus de 8, 16, 32, 64.

Ayant les Sinus de 1, 8, j'ai le Sinus de la différence 7, &c.

40. 2°. Faut-il trouver les Sinus des minutes depuis une jusqu'à 60 ?

On peut les prendre comme ceux des degrés.

\*N.39. Ayant le Sinus d'un degré\*, j'ai les Sinus de 60', de 30', de

\*N.3. 15', de  $7\frac{1}{2}'$ , la corde de 15'\*,

\*N.29. de 5', de 3', de 10', de 12'\*, &

& 30. par conséquent les Sinus de 5',

\*N.31. de 6', de 3'\*, de 2', différence de 5' & de 3', & les Sinus de 3' & de 2', me donnent ceux de  $1\frac{1}{2}'$ , de 1', &c.

EUDOXE. Ne peut-on point encore parvenir là par une autre voye ?

Ici, les arcs, à cause de leur petitesse, peuvent se prendre pour des lignes droites, faisant mêmes angles avec les rayons : donc les Triangles formés par les Sinus droits avec les Sinus versés & les arcs sont sensiblement des Triangles rectilignes semblables ; & par conséquent, les Sinus & les arcs sont sensiblement proportionnels.

Cela posé; 1°. Ayant le Sinus de 12 degrés, on aura les Sinus de 6, 3,  $1\frac{1}{2}$ . 2°. Ayant le Sinus de  $1\frac{1}{2}$  degrés, on aura le Sinus de 45, moitié de  $1\frac{1}{2}$  degré. 3°. Ayant le Sinus de 45', on aura le Sinus de 1' par une règle de trois, en disant, si 45' donnent tant de parties du rayon, combien 1'? Si 45' donnent tant, combien 60' = 1 degré?

Or ayant le Sinus de 12 degrés, de 6, de 1, on aura les Sinus des autres degrés, en prenant le double, la moitié, la différence.

Ainsi, ayant le Sinus de 12 degrés, on peut prendre & les minutes & les degrés.

41. Mais enfin, ayant les Sinus des minutes jusques à 60', & des degrés jusqu'à 90°; il faut trouver les Sinus de tant de degrés & de minutes.

ARISTE. Je partage les arcs dont les degrés font en nombre

impair, & leurs complemens; & j'ai les Sinus de tant de degrés & de minutes.

Ayant le Sinus de 45 degrés, j'ai dans le Sinus de la moitié de l'arc, le Sinus de  $22^{\circ} 30'$ , &c.

Enfin, en subdivisant, on aura les Sinus des secondes, des tierces, &c. par exemple, ayant le Sinus de  $1'$ , j'ai le Sinus de  $30''$ , de  $15''$ , de  $7''$ ,  $30'''$ , &c.

EUDOXE. Je conçois assez votre idée sur la manière de construire la Table des Sinus.

ARISTE. Quelques Propositions sur la valeur des Tangentes, & quelques Problèmes, nous donneront la Table des Tangentes.

### PROPOSITION I.

Fig. 16. 42. La Tangente AB d'un arc AD est au rayon AC, comme le Sinus droit DE de cet arc est au Sinus DF de son complément DG.

Je



Je dis que  $AB.AC :: DE.DF.$

1°. Les angles DEC, DFC sont droits étant faits par des Sinus, qui sont des perpendiculaires, & l'angle ECF l'est, ayant pour mesure le quart de cercle AG. Donc le Quadrilatere EF qui vaut quatre droits est un rectangle (a). Ainsi,  $DF = CE.$

2°. Les Triangles BAC, DEC, qui ont les angles A & E droits, & l'angle C commun, sont équiangles (b).

Donc  $AB.AC :: DE.EC = DF$  (c): donc  $AB.AC :: DE.DF.$

43. EUDOXE. Donc  $\frac{AC \times DE}{DF} = AB$  (d).

Ainsi, multipliant le rayon AC par le Sinus droit DE, & divisant le produit par le Sinus connu du complément, on aura dans le:

(a) Géométrie, N. 175.

(b) Ibid. N. 133.

(c) Ibid. N. 150.

(d) Calcul Littéral, N. 137.

Quotient la valeur de la Tangente.

*Fig. 16.* 44. Mais connoissant le Sinus droit DF d'un arc DG & le Sinus DE du complément AD ; il s'agit de trouver la Tangente AB du complément AD.

ARISTE. A cause des Triangles \*N. 43. semblables \* ,  $DF = EC$ .  $DE :: AC$ .  $AB$ .

$$\text{Donc } \frac{AC \times DE}{DF} = AB \text{ (a).}$$

Ainsi, multipliant le rayon par le Sinus du complément, & divisant le produit par le Sinus droit, on aura dans le Quotient la Tangente du complément.

### PROPOSITION II.

*Fig. 17.* 45. Le rayon CD est moyen proportionnel entre la Tangente AB d'un arc AG & la Tangente DE de son complément DG.

Je dis que  $AB$ .  $CD$ .  $DE$ .

(a) Calcul Littéral, N. 137.

Soit le Rectangle AF : donc  
 $CF = AB$  ;  $FB = AC = CD$  ; &  
 les Triangles BCF , ECD sont  
 équiangles , ayant un angle droit ,  
 chacun , F , D , & un angle com-  
 mun en C.

Ainsi ,  $CF . FB :: CD . DE$  (a) :  
 or ,  $AB = CF$  , &  $FB = CD$  :

Donc  $AB . CD :: CD . DE$  , ou  
 $\div AB . CD . DE$ .

46. EUDOXE. De-là  $\frac{CD^2}{AB} = DE$  ,  
 ou  $\frac{CD^2}{DE} = AB$  (b).

Ainsi , divisant le carré du  
 rayon par la Tangente d'un arc ,  
 vous avez dans le Quotient celle  
 du complément.

47. Mais , s'il faut trouver la Fig. 22.  
 Tangente DC d'un arc AD , dont  
 l'on vous donne le Sinus AB précisé-  
 ment . . . .

ARISTE. Soit le rayon EA pro-  
 longé en C. Connoissant l'hypo-

(a) Géométrie , N. 150.

(b) Calcul Littéral , N. 139.

ténuse  $EA = ED$ , autre rayon, avec le côté  $AB$  du Triangle rectangle  $ABE$ , je connois aussi  $EB$  (a).

Cela posé, comme les Triangles  $ABE$ ,  $CDE$  sont semblables, ayant les angles en  $B$ ,  $D$  droits, & l'angle en  $E$  commun:

Je dis,  $EB. AB :: ED. DC$ ; & j'ai dans le quatrième terme de la Proportion la Tangente  $DC$ .

48. Enfin, faut-il construire la Table des Tangentes?

1°. Je prens les Sinus droits, <sup>\*N.39.</sup> des arcs \*, & les Sinus des com-  
40. 41. plémens\*.

2°. Je multiplie le rayon par le Sinus d'un arc; & divisant le produit par le Sinus du complément, j'ai dans le Quotient la Tangente <sup>\*N.43.</sup> de l'arc\*.

3°. Je divise le quarré du rayon

(a) Géométrie, N. 204.

(b) Ibid. N. 133.

par la Tangente d'un arc ; & le Quotient est la Tangente du complément \*.

\*N. 46.

Ou bien, je multiplie le rayon par le Sinus du complément, & divisant par le Sinus droit, j'ai la Tangente du complément \*.

\*N. 44.

Encore quelques Propositions, & quelques Problèmes ; & nous aurons de même la Table des Sécantés.

## PROPOSITION I.

49. *Un angle, aussi-bien que l'arc qui en est la mesure, a son Sinus total, sa Tangente, sa Sécante.*

Soit l'angle B, l'arc AC, mesure de l'angle B. Fig. 19.

1°. Le côté BC est rayon de l'arc AC, ou Sinus total.

2°. Tirez DC perpendiculaire sur l'extrémité C du rayon ; c'est la Tangente de l'arc AC, ou de l'angle B \*.

\*N. 7.

Enfin, le côté BA prolongé en D est la Sécante \*.

\*N. 8.

## PROPOSITION II.

*Fig. 19.* 50. Le Sinus total BC, la Tangente CD d'un arc AC, & la Sécante BD, font un Triangle rectangle DBC.

L'angle en C fait par la Tangente CD, & le Sinus total ou  
 \* N. 7. le rayon BC est droit\* : donc le Triangle BDC est rectangle (a).

*Fig. 20.* 51. Ainsi, 1°. Faut-il trouver la Sécante AB d'un arc CD, dont vous ayez la Tangente BC ? Joignez la Tangente BC & le rayon AC par la Sécante AB ; & c'est un Triangle rectangle (a) dont vous connoissez les deux côtés, AC rayon, & BC Tangente. Prenez la racine du carré de la Sécante, ou de l'hypoténuse AB, égal à la somme des carrés des côtés BC, AC (b) : & ce sera la Sécante AB.

(a) Géométrie, N. 120.

(b) Ibid. N. 204.

52. 2°. S'il faut trouver la Sé- *Fig. 203.*  
 cante AB d'un arc dont l'on a le  
 Sinus ED, le Sinus ED donnera  
 la Tangente BC\* ; or ayant la *\*N. 473.*  
 Tangente BC avec le rayon, l'on  
 a l'hypoténuse AB, qui est la Sé-  
 cante (a).

## PROPOSITION III.

53. Le rayon  $AB = AD$  est *Fig. 274.*  
 moyen proportionnel entre le Sinus  
 droit BC d'un arc BG & la Sécan-  
 te AE du complément BD.

Je dis que  $\therefore BC. AB. AE$ .

Les Triangles ABF , AED  
 sont semblables , &  $BC = AF^*$ . *\*N. 423.*

Donc  $AF. AD :: AB. AE$  (b) :  
 or  $BC = AF$  , &  $AB = AD ::$   
 donc  $\therefore BC. AB. AE$ .

Ce qui va nous donner la réso-  
 lution de quelques Problèmes.

(a) Géométrie , N. 2043.

(b) Ibid. N. 150..

## PROBLÈME I.

Fig. 21. 54. Connoissant le Sinus droit BC d'un arc BG avec le rayon AB, trouver la Sécante AE du complément BD.

Comme le rayon est moyen proportionnel entre le Sinus droit d'un arc, & la Sécante du complément \*, divisant le quarré du rayon par le Sinus droit, nous aurons dans le Quotient la Sécante du complément (a).

EUDOXE. Puisque  $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AE}$ ,  
 $AE, \frac{AB^2}{BC} = AE$  (b).

ARISTE. Rien de plus précis.

## PROBLÈME II.

Fig. 21. 55. Connoissant le Sinus BF du complément BD d'un arc BG ; trouver la Sécante AH de cet arc BG.

$AC = BF. AB :: AG = AB$

(a) Calcul Littéral, N. 139.

(b) Ibid. N. 139.

AH,



AH, à cause des Triangles semblables ACB, AGH.

Donc  $\div$  BF. AB. AH. Donc

$$\frac{AB^2}{BF} = AH.$$

Ainsi, divisant le quarré du rayon AB par le Sinus BF du complément, nous aurons dans le Quotient la Sécante AH.

D'ailleurs, tout arc au-dessous de 90 degrés est complément; un Sinus droit est Sinus du complément, & au contraire.

Ainsi, en général, si l'on divise le quarré du rayon par le Sinus d'un arc moindre que le quart de cercle, on a la Sécante de l'autre arc, qui est complément au quart.

### PROBLÈME III.

56. Connoissant le Sinus droit BC d'un arc BG, avec le rayon AB; trouver la Sécante AH de cet arc, indépendamment de la Tangente.

Tome II.

Hh

## 362 II. ENTRETEN.

Le Sinus droit BC de l'arc BG  
me donne le Sinus BF du com-  
plément \*.

\*N.13.

Or ayant le Sinus du complé-  
ment d'un arc, j'ai la Sécante de  
cet arc \*.

\*N.54.

## PROBLÈME IV.

57. *Construire enfin la Table des Sécantes.*

Je prens le quarré du rayon ;  
& divisant ce quarré par les Sinus  
droits, ou par les Sinus des com-  
plémens, j'ai les Sécantes \*.

\*N.54.

55.56. 58. *EUDOXE.* L'on a des Ta-  
bles des Sinus, des Tangentes  
& des Sécantes ; mais quelque-  
fois on les a sans sçavoir en faire  
usage.

*ARISTE.* Les voilà justement ;  
& vous voulez, Eudoxe, que je  
m'explique encore sur la manière  
de s'en servir.

Hé bien, 1°. Le commence-  
ment de ces Tables regarde les

angles qui ont pour mesure des minutes précisément depuis 1' jusqu'à 60' inclusivement, ayant pour titre de la page, *dégrés 0* ; pour titres des colonnes verticales, *Minutes*, *Sinus*, *Tangentes*, *Sécantes*. La colonne des minutes les exprime par des chiffres disposés en progression Arithmétique ; la colonne des Sinus exprime le nombre des parties contenuës dans le Sinus de chaque angle de tant de minutes ; la colonne des Tangentes, le nombre des parties des Tangentes, &c.

2°. Les autres pages des Tables regardent les angles, qui ont pour mesure des degrés seulement, ou des degrés avec des minutes. Ces pages ont pour titre général tant de degrés, par exemple, 89 *dégrés*, 88 *dégrés*, &c. pour titres des colonnes, *Minutes*, *Sinus*, *Tangentes*, *Sécantes*.

Les rangs horifontaux qui n'ont

Hh ij

point de minutes à côté, regardent les angles qui ont pour mesure des degrés sans minutes; les autres rangs, les angles qui ont pour mesure des degrés avec quelques minutes.

3°. Chaque nombre des degrés & des minutes d'une Table est le complément des degrés & des minutes correspondants de la Table opposée; par exemple, si l'on a le Sinus de 84 degrés, 50', & qu'on cherche son complément & le Sinus du complément; dans la Table opposée, vis-à-vis 50 minutes, on trouve au rang des minutes, 10 minutes, & au haut de la page, 5 degrés. Les 5 degrés avec les 10', font le complément de l'angle de 84°. 50'. Les parties du Sinus placées vis-à-vis les 10' au même rang, c'est-à-dire, . . . . 900532, sont la valeur du Sinus du complément, ou d'un angle de 5 degrés 10'.

Cela posé ; faut-il trouver par le moyen des Tables , le Sinus , la Tangente & la Sécante d'un angle de tant de minutes ?

Je cherche dans les pages qui ont pour titre *dégrés 0* , & dans la colonne des minutes , le nombre qui exprime la grandeur de l'angle ; & je trouve vis-à-vis , son Sinus , sa Tangente , & sa Sécante. S'il s'agit d'un angle de 15', par exemple ; je cherche 15 dans la colonne des minutes..... ; & je trouve vis-à-vis , dans la colonne des Sinus 436.33 pour le Sinus ; dans la colonne des Tangentes , &c..

Faut-il trouver le Sinus , la Tangente , la Sécante d'un angle de tant de degrés précisément ?

Je cherche la page dont le titre exprime les degrés de l'angle ; si l'angle est de 30 degrés ; je cherche la page qui a pour titre 30 degrés ..... ; & je trouve au pre-

mier rang horizontal dans la colonne des Sinus 50000.00 pour le Sinus ; dans la colonne des Tangentes , 57735.03 , pour les Tangentes , &c.

Faut-il trouver le Sinus , &c. de tant de degrés & de minutes ?

Dans la page dont le titre exprime les degrés de l'angle, je descends jusqu'à l'endroit de la colonne des minutes , où le nombre des minutes de l'angle se rencontre ; & je trouve vis-à-vis , ce que je cherchois. Si l'angle est de  $30^{\circ}$ ,  $15'$ , dans la page qui a pour titre *30 degrés*, je cherche 15 dans la colonne des minutes ; & vis-à-vis de 15 , je trouve.... 50377.40 pour le Sinus , &c.

Ayant les Sinus , les Tangentes , les Sécantes , faut-il trouver la valeur des angles ?

1°. Je cherche ces Sinus , &c. dans les Tables.

2°. J'observe le titre au haut de

la page, & le nombre des minutes qui répond au Sinus, &c. & ce titre & ce nombre expriment la valeur de l'angle.

Que le Sinus soit ...50377.40 : je trouve 50377.40 parmi les Sinus, dans la page qui a pour titre 30 *dégrés*, & vis-à-vis de 15' : ainsi l'angle est de 30°, 15'.

Enfin, connoissant le Sinus ou la Tangente d'un angle, faut-il trouver encore par le moyen des Tables la Sécante?

La Sécante est dans le rang horizontal du Sinus & de la Tangente.

On trouvera de même la Tangente, ayant le Sinus ou la Sécante ; & le Sinus, ou la Sécante, ayant la Tangente.

Si ce détail vous a paru un peu long, Eudoxe, pourquoi m'y engagez-vous ? L'usage des Sinus nous fournira quelque chose de plus amusant.

---



---

### III. ENTRETEN.

*Sur l'usage des Sinus, des Tangentes & des Sécantes.*

**EUDOXE.** I L me semble, Ariste, que vous nous avez annoncé des Problèmes intéressants,

**ARISTE.** Problèmes, qui détermineront les distances, & qui peuvent servir à corriger les erreurs des Sens, qui réduisent à si peu de chose la vaste étendue des Cieux; mais il faut que quelques Propositions préviennent les Problèmes.

**EUDOXE.** Suivons le fil de vos idées, & l'ordre des figures si fidèles à vous les tracer.

**ARISTE.** Je commence.



## PROPOSITION I.

59. *Dans un Triangle , le Sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle , comme le Sinus d'un autre angle est au côté opposé à cet autre angle.*

Soient ABC , Triangle inscrit Fig. 22. au cercle ; DE , DF , DG , perpendiculaires , qui passant par le centre D , coupent les côtés AB , BC , CA , par le milieu H , I , K , & les arcs par le milieu E , F , G (a) ; DA , DB , DC , rayons.

L'angle au centre ADE = ACB inscrit , qui a pour mesure aussi l'arc AE , moitié de l'arc AEB.(b) , & par conséquent l'angle BDF = BAC , & l'angle ADG = ABC.

Or AH est Sinus de l'angle ADE ; BI , de l'angle BDF ; AK , de l'angle ADG , étant perpendi-

(.) Géométrie, N. 60. 57.

(b) Ibid. 93. 114.

### 370 III. ENTRETIEN

culaire sur le rayon DE, DF, ou  
 \* N. 3. DG\*, ou moitié de AB, de BC,  
 de AC. Donc AH est Sinus de  
 l'angle ACB; BI, de l'angle  
 BAC; AK, de l'angle ABC.

Cela posé; je dis que  $AH. AB :: BI. BC :: AK. AC$ .

AH est moitié de AB; BI, de  
 BC; AK, de AC: donc  $AH. AB :: BI. BC :: AK. AC$ .

60. De-là, 1°. Dans un Trian-  
 gle, un côté est au Sinus de l'an-  
 gle opposé, comme un autre  
 côté est au Sinus de l'angle oppo-  
 sé à cet autre côté.

Car si  $AH. AB :: BI. BC :: AK. AC$ ; en raison inverse,  $AB. AH :: BC. BI :: AC. AK$  (a).

61. 2°. Les côtés sont comme  
 les Sinus :

Car si  $AB. AH :: BC. BI$ , &c.  
 en raison alterne,  $AB. BC :: AH. BI$ , &c.

62. 3°. Dès qu'un Sinus est au

(a) Géométrie, N. 144.

côté opposé à un angle , comme un autre Sinus est au côté opposé à un autre angle du même Triangle , le premier Sinus est Sinus du premier angle ; le second du second.

Si le Sinus qui est le 4<sup>e</sup>. terme de la proportion , ne se trouve pas exactement dans les Tables , on prend le plus approchant , la différence étant insensible.

# PROPOSITION II.

63. Dans le Triangle obtus-angle HIG, le Sinus du supplément IHK *Fig. 23.* peut être regardé comme le Sinus de l'angle obtus GHI.

1°. J'abaisse la perpendiculaire IK.

2°. Je décris avec même ouverture de Compas les arcs LN, MO : donc  $GL = HM$ .

3°. Jetire la perpendiculaire LP, Sinus de l'angle en G\*, & MR, Sinus du supplément IHK. \* N. 31.

Les Triangles GIK, GLP

### 372 III. ENTRETEN

sont semblables (a), ayant un angle droit, chacun, en K, P, & un angle commun G; les Triangles IHK, MHR le sont par la même raison.

Cela posé; MR est Sinus de l'angle obtus GHI, si MR. GI *N. 62.* :: LP. HI \*; & MR. GI :: LP. HI, si  $MR \times HI = GI \times LP$  (b): car lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les racines sont réciproquement proportionnelles.

Il suffit donc de prouver que  $MR \times HI = GI \times LP$ .

A cause de Triangles semblables, IHK & MHR, GIK & GLP.

1°. IK. MR :: HI. HM (c): donc  $MR \times HI = IK \times HM$  (d).

2°. IK. GI :: LP. GL = HM par la construction: donc  $GI \times LP = IK \times HM$ :

(a) Géométrie, N. 133.

(b) Calcul Littéral, N. 141.

(c) Géométrie, N. 150.

(d) Calcul Littéral, N. 135.

Or deux grandeurs égales à une troisième sont égales entr'elles : donc  $MR \times HI = GI \times LP$ .

## PROPOSITION III.

64. Connoissant deux angles & un côté dans un Triangle, on connoît le reste.

1°. L'on connoît le troisième angle (a).

2°. Connoissant les trois angles, on connoît leurs Sinus\*. \*N. 55.

3°. Quand on connoît les trois Sinus & un côté, l'on connoît les deux autres côtés par une règle de trois (b) : car comme le Sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, ainsi le Sinus d'un autre angle est au côté opposé à cet autre angle ; & c'est connoître le reste.

## PROPOSITION IV.

65. Connoissant dans un Trian-

(a) Géométrie, N. 122.

(b) Calcul Littéral, N. 137.

### 374 III. ENTRETEN.

*gle deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés, on connoît le reste.*

1°. Connoissant un angle, on a  
\*N.39. son Sinus\*.

\*0.41. 2°. Connoissant un Sinus op-  
\*58. posé à l'un des deux côtés connus,  
on connoît le second Sinus par

\*N.59. une règle de trois\*, car comme  
un côté est au Sinus d'un angle,  
ainsi l'autre côté est au Sinus d'un  
autre angle.

3°. Connoissant le second Si-  
\*N.58. nus, on connoît le second angle\*,  
& par conséquent le troisième.

Or connoissant les trois angles  
& deux côtés, on connoît le troi-  
\*N.64. sième côté\*.

Fig.24. 65. Dans un Triangle rectan-  
gle ABC, un côté BC divisé en  
un certain nombre de parties, est  
à l'autre côté AB divisé en parties  
de même espèce, comme le pre-  
mier BC divisé en un certain nom-  
bre de parties plus petites est au  
second AB divisé en parties plus

petites de même espèce, les parties prises ensemble, étant comme les tous.  $BC = 3$  pieds est à  $AB = 2$  pieds, comme  $BC = 36$  pouces est à  $AB = 24$  pouces; 2 pieds sont les deux tiers de 3, comme 24 pouces sont les deux tiers de 36.

Ainsi, dans le Triangle rectangle ABC, le côté BC réduit en toises est au côté AB réduit en toises, comme le côté BC réduit en parties du Sinus total est au côté AB réduit en parties du Sinus total. Or BC réduit en parties du Sinus total est le Sinus total même, ou le rayon; & AB, réduit en parties telles que celles du Sinus total, est la Tangente de l'angle opposé\*.

\* N. 41

Donc le côté BC, qui est rayon, 9. 49, est à l'autre côté AB, comme le Sinus total est à la Tangente de l'angle opposé.

Par la même raison, le côté

### 376 III. ENTRETIEN.

BC pris pour rayon , est à l'hypoténuse AC , comme le Sinus total à la Sécante AC.

Cela posé ;

#### PROPOSITION V.

*Fig. 24.* 66. Connoissant les deux côtés BC, AB d'un Triangle rectangle ABC, on aura par le moyen de la Tangente les angles ACB, BAC sur la base, & leurs Sinus.

1°. Connoissant les côtés BC, AB, on connoît la Tangente de l'angle ACB, en disant : BC.

\*N.65.  $AB :: \text{Sinus total. Tangente}^*$ ,  
or connoissant la Tangente de  
\*N.58. l'angle, on connoît l'angle\*.

2°. Connoissant l'angle ACB avec l'angle droit ABC, l'on connoît l'autre angle BAC sur la base.

Enfin, ayant les angles on a  
\*N.58. les Sinus\*.

#### PROPOSITION VI.

*Fig. 24.* 67. Connoissant un côté d'un Triangle



*Triangle rectangle ABC avec la base AC, on aura par le moyen de la Sécante l'angle compris ACB.*

Connoissant un côté BC avec la base AC, on connoît la Sécante en disant:  $BC. AC :: \text{Sinus total. Sécante}^*$ : or ayant la Sécante d'un angle, on a l'angle  $^*$ .

\*N. 65.

\*N. 58.

68. EUDOXE. Connoissant les deux côtés d'un Triangle rectangle, on aura, ce semble, les angles sur la base indépendamment de la Sécante ou de la Tangente.

ARISTE. Prenez la racine de la somme des quarrés des deux côtés connus; vous aurez dans la racine, l'hypoténuse; or connoissant les trois côtés avec un angle, c'est-à-dire, avec l'angle droit; on a le reste  $^*$ .

\*N. 65.

EUDOXE. Ici, Ariste, il me semble que la foule des Problèmes dont vous parliez, vient s'offrir dans les figures qui frappent mes yeux.

## 378 III. ENTRETEN

ARISTE. Nous essayerons de les résoudre ces Problèmes, dans l'ordre où ils se présenteront :

## PROBLÈME I.

69. EUDOXE. Hé bien, connoissant dans un Triangle deux angles & un côté, trouver les deux autres côtés.

ARISTE. 1°. Connoissant deux angles, je connois le troisième.  
\*N. 58. & par conséquent les trois Sinus\*.

2°. Je dis : comme le Sinus de l'angle opposé au côté connu est à ce côté, ainsi le Sinus opposé au second, ou au troisième côté est à ce côté.

Fig. 25. Comme le Sinus de l'angle A, qui est de 40 degrés, par exemple, est au côté opposé BC de 15 Toises; ainsi, le Sinus de l'angle B, qui est de 60 degrés, au côté AC; ainsi le Sinus de l'angle C au côté  
\*N. 59. AB\* ; & le quatrième terme de la proportion est un côté cherché.

## PROBLÈME II.

70. EUDOXE. Connoissant deux *Fig. 26.*  
côtés  $EF=20$  Toises, &  $DF=26$   
Toises, avec un angle  $D=50^\circ$ . op-  
posé à un côté connu  $EF$ ; trouver les  
deux autres angles  $E, F$ , & le troi-  
sième côté  $DE$ .

ARISTE. Je dis 1°. Comme le  
côté  $EF$  est au Sinus de l'angle  $D$   
connu, ainsi le côté  $DF$  au Sinus  
de l'angle  $E$  \* : voilà le second \* *N. 604.*  
angle  $E$  connu, & par conséquent  
le troisième, avec les trois Sinus \*. \* *N. 624.*

2°. Comme le Sinus de l'angle  
 $D$  est au côté  $EF$ , ainsi le Sinus  
de l'angle  $F$  au côté  $DE$  : & voi-  
là le côté  $DE$  connu de même.

## PROBLÈME III.

71. EUDOXE. Connoissant deux *Fig. 27.*  
côtés  $AB, AC$  avec un angle aigu  
 $BAC$  compris entre les deux côtés;  
trouver le reste du Triangle  $ABC$ .

ARISTE. 1°. Du sommet  $B$  de

### 380 III. ENTRETEN

l'un des angles inconnus, je tire une perpendiculaire  $BD$  sur la base  $AC$ ; & j'ai deux Triangles rectangles  $BAD$ ,  $BCD$  (a).

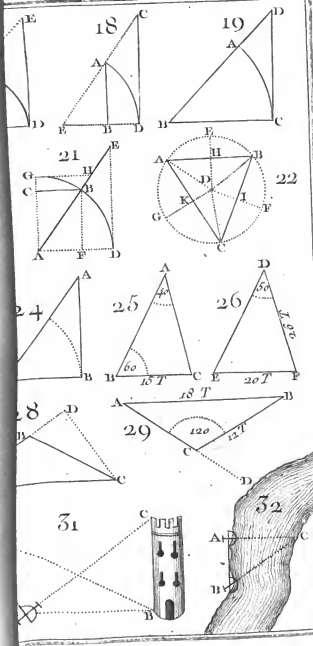
2°. Connoissant le côté  $AB$  du premier Triangle  $BAD$ , avec l'angle donné  $A$ , & l'angle droit  $ADB$ , je connois les trois angles & un côté d'un Triangle, & par conséquent les trois côtés  $AB$ ,  
 \*N 65.  $AD$ ,  $BD$  \*.

3°. Du côté connu  $AC$ , j'ôte  $AD$  connu : reste  $DC$  connu, comme  $BD$ .

4°. connoissant les deux côtés  $DC$ ,  $BD$  du Triangle  $BCD$ , rectangle en  $D$ , je connois l'hypoténuse  $BC$  \* : voilà les trois côtés.  
 \*N 68.  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  du Triangle  $ABC$  connus avec un angle  $BAC$ .

Enfin, je dis : comme le côté  $BC$  est au Sinus de l'angle connu  $A$ , ainsi le côté  $AB$  au Sinus de l'angle  $ACB$ . Voilà le second an-

(a) Géométrie, N. 95.





SUR LA TRIGON. RECTIL. 38  
gle C connu, & par conséquent  
le troisième CBA; & c'est tout le  
Triangle.

PROBLÈME IV.

72. EUDOXE. Connoissant dans *Fig. 283.*  
un Triangle ACB deux côtés AB,  
BC, & un angle obtus ABC com-  
pris entre ces côtés; trouver le reste.

1°. Sur AB prolongé, j'éleve  
la perpendiculaire CD (a).

2°. Connoissant l'angle donné  
ABC, je connois le supplément  
CBD (b), & comme l'angle en  
D est droit (c), je connois les trois  
angles du Triangle rectangle  
BCD avec le côté donné BC; &  
voilà les côtés CB, BD connus\*. \*N. 64.

3°. Au côté donné AB, j'ajou-  
te BD; & je connois AD.

4°. Connoissant les côtés AD  
& CD du Triangle ADC rectan-

(a) Géométrie, N. 28.

(b) Ibid. N. 97.

(c) Ibid. N. 25.

### 382 III. ENTRETIEN

gle en D , je connois l'hypoténuse  
 \*N.68. le AC \* ; & j'ai les trois côtés du  
 Triangle ACB avec l'angle obtus  
 ABC.

5°. Je prens pour Sinus de l'an-  
 gle obtus, celui de son supplément  
 \*N.63. CBD \*.

Enfin , ayant les trois côtés  
 avec le Sinus d'un angle , j'ai les  
 \*N.65. deux autres angles \*.

### PROBLÈME V.

*Fig. 29.* 73. EUDOXE. Connoissant dans  
 un Triangle obtusangle ABC deux  
 côtés  $AB = 18$  Toises ,  $BC = 12$  ,  
 avec l'angle obtus  $ACB = 120$  dé-  
 grés , non compris entre les côtés con-  
 nus ; trouver le reste.

ARISTE. 1°. Je prolonge un cô-  
 té AC de l'angle obtus , & prens  
 le Sinus du supplément BCD pour  
 \*N.63. le Sinus de l'angle obtus ACB \*.  
 Ce supplément est de 60 degrés ,  
 puisque l'angle obtus ACB est de  
 120 degrés dans l'hypothèse.



SUR LA TRIGON. RECTIL. 383

2°. Je dis : si le côté  $AB = 18$

Toises , par exemple , donne tant de parties pour le Sinus de l'angle  $ACB$  de 60 degrés , combien le côté  $BC = 12$  Toises , pour le Sinus de l'angle  $A$  ? ou comme le côté  $AB = 18$  toises est au Sinus du supplément  $BCD$  , ainsi  $BC = 12$ . Toises au Sinus de l'angle  $A$  \*. \*N.60.

Connoissant enfin , deux angles & par conséquent le troisième avec deux côtés , je connois le troisième côté \*. \*N.64.

## PROBLÈME VI.

74. EUDOXE. Connoissant la base  $BC$  & un angle  $BCD$  sur la base d'un Triangle rectangle ; trouver le reste. Fig. 39.

ARISTE. Connoissant la base  $BC$  & un angle  $BCD$  sur la base avec l'angle droit  $BDC$  connu , je connois les trois angles & un côté ; & par conséquent le reste \*. \*N.64.

Je dis : si le Sinus de l'angle

### 384 III. ENTRETEN.

droit BDC, ou le Sinus total donne tant de Toises, par exemple, pour la base BC; combien le Sinus de l'angle BCD, ou CBD sur la base, pour le côté opposé? Le quatrième terme de la proportion est le côté opposé BD, ou BC.

Fig. 30. 75. EUDOXE. Connoissant la base BC d'un Triangle rectangle avec un côté BD; l'inverse, pour ainsi dire, vous donnera le reste.

Vous direz: si la base  $BC = 37$  Toises, par exemple, donne tant de parties pour le Sinus de l'angle droit opposé, combien le côté  $BD = 22$ ; par exemple? Vous aurez dans le quatrième terme de la proportion, le Sinus du second angle C, & par conséquent le.  
\*N. 58. second angle\*, &c.

### PROBLÈME VII.

Fig. 31. 76. Mesurer la distance AB d'un objet, d'une Tour inaccessible BC..

ARISTE. Je plante un Piquet au point

point A ; & avançant sur le terrain par une ligne AD qui fasse un angle avec AB, distance de la Tour, je plante un autre piquet au point D.

2°. Du point D, dirigeant la base d'un demi-cercle vers A, & l'Alidade, ou la Règle mobile, vers B, ou ce qui revient au même, avec un Graphomètre, je mesure l'angle ADB.

3°. Ayant mesuré la distance des piquets A, D, ce qui s'appelle prendre AD pour base, je mesure au point A l'angle BAD.

Et je connois dans le Triangle DAB deux angles BAD, ADB, & par conséquent le troisième ABD, avec les trois Sinus\*, & <sup>\*N. 59.</sup> un côté AD. <sub>ou 58.</sub>

Enfin, je dis : comme le Sinus de l'angle ABD est au côté AD, ainsi le Sinus de l'angle ADB est au côté AB\* ; & le quatrième <sup>\*N. 59.</sup> me est la valeur de la distance AB.

## PROBLÈME VIII.

*Fig. 31.* 77. EUDOXE. Trouver la hauteur BC d'une Tour inaccessible , mais sur un Plan.

ARISTE. 1°. Je prens la distance AB\*.

2°. Du point A , dirigeant l'Alidade de mon demi-cercle vers la cime C de la Tour , & la base vers le pied B , je mesure l'angle BAC formé par mon rayon visuel AC & la distance AB.

Et connoissant dans le Triangle ACB , l'angle BAC avec l'angle droit ABC, je connois tous les angles avec un côté AB.

Enfin , je dis : comme le Sinus de l'angle ACB est au côté AB , ainsi le Sinus de l'angle BAC au côté BC \* : & je connois BC , hauteur de la Tour.

## PROBLÈME IX.

*Fig. 32.* 78. EUDOXE. Mesurer la lar-

geur AC d'une Riviere.

ARISTE. Je trouve cette largeur ou la distance AC des bords de la Riviere, comme j'ai trouvé la distance AB de la Tour inaccessible \*.

\*N. 76.

1°. Du point A de l'un des bords, dirigeant la base de mon demi-cercle vers un autre point B du même bord, & l'Alidade vers un point C sur l'autre bord vis-à-vis, je mesure l'angle en A.

2°. Du point B, dirigeant la base de l'instrument vers A & l'Alidade vers C, je prens l'angle en B.

3°. Je toise la distance AB.

Voilà deux angles A, B, & un côté AB connus dans le Triangle ABC. J'aurai donc la distance AC, en disant : si le Sinus de l'angle C donne tant de Toises pour le côté AB; combien le Sinus de l'angle B pour le côté ou la distance AC ?

Kk ij

## PROBLÉME X.

*Fig. 33.* 79. EUDOXE. Mesurer la profondeur AB d'un Puits vuide AD.

ARISTE. Je trouve la profondeur du Puits comme la hauteur de la Tour \*.

Je prens d'abord le diamètre AC de la largeur.

Ensuite , je mesure l'angle ACB formé par le rayon visuel CB & diamètre AC.

Enfin, connoissant l'angle ACB avec l'angle droit BAC & le côté AC, je connois le Triangle ABC, & par conséquent le côté, ou la profondeur AB.

## PROBLÉME XI.

*Fig. 34.* 80. EUDOXE. Trouver la hauteur AB d'une Montagne ABF.

ARISTE. Du point D, à quelque distance du pied F de la Montagne, dirigeant la base de l'instrument parallèlement à l'horison,

SUR LA TRIGON. RECTIL. 389  
& l'Alidade vers la cime A, je  
prends l'angle ADB fait par l'Ali-  
dade & la base.

2°. Ayant mesuré la distance  
DC, de 10 Toises, par exemple,  
j'opère de même en C, & je prends  
l'angle ACD.

Voilà les deux angles ADC ;  
ACD avec le côté DC connus  
dans le Triangle CAD, & par  
conséquent le côté AC\*.

\*N.64

Enfin, connoissant l'angle ACB,  
supplément de ACD & l'angle  
droit ABC, avec le côté AC du  
Triangle BAC, je connois la hau-  
teur AB de la Montagne.

## PROBLÈME XII.

81. EUDOXE. *Trouver la distan- Fig. 34.  
ce DE, ou CE de la cime, & la hau-  
teur AE d'une Tour située sur le  
sommet d'une Montagne ABF.*

ARISTE. 1°. Du point D & du  
point C, je dirige l'Alidade vers  
la cime E, & la base de l'instru-

K k iij

### 390 III. ENTRETIEN.

\*N.80. ment vers B ; comme j'ai fait \* ;  
& connoissant de même les angles EDC , ECD , avec le côté DC du Triangle CED , je connois DE , ou CE.

2°. Connoissant le supplément de l'angle connu ECD & l'angle droit B avec le côté CE , je con-  
\*N.80. nois la hauteur commune BA + AE \*.

\*N.80. Enfin , de BA + AE , ôtez BA connu \* , reste AE.

### PROBLÈME XIII.

Fig. 35. 82. EUDOXE. Connoissant la hauteur d'une Montagne , trouver le  
diamètre AC de la Terre.

ARISTE. 1°. De la cime B , je regarde le point D qui borne ma vue dans la surface de la Terre ; & à la faveur d'un instrument garni de son plomb , j'observe l'angle ABD formé par la Tangente ou le rayon visuel BD & la hauteur  
\*N.80. connue AB de la Montagne \*.



2°. Je prens la longueur de la Tangente ou la distance BD \*. \* N. 82.

3°. La Sécante étant à la Tangente, comme la Tangente à la partie extérieure de la Sécante (a);

∴ BC. BD. AB. Donc  $\frac{BD^2}{AB} = BC$  (b).

Ainsi, je divise le quarré de BD ou du rayon visuel par la hauteur AB de la Montagne; & le Quotient est la valeur de BC, ou de AB + AC.

Enfin de  $BC = AB + AC$ , j'ôte AB, qui est la hauteur de la Montagne: & le reste AC est le diamètre de la Terre.

83. EUDOXE. Portons nos regards plus haut encore que la cime de la Montagne.

#### PROBLÈME XIV.

Trouver l'élevation EL d'un Nua- Fig. 26.

(a) Géométrie, N. 160.

(b) Calcul Littéral, N. 139.

K k. iiij.

*ge immobile sur un endroit inaccessible L.*

ARISTE. 1°. Ayant observé  $F$  & en  $I$ , & mesuré les angles  $IFE$ ,  $EIF$  & la distance  $IF$ , connois le côté  $EI$  du Triang  
 \*N.80.  $FEI$ .\*

2°. Je connois l'angle  $EII$  supplément de l'angle connu  $EIF$  & l'angle droit  $ELI$ .

Or connoissant dans le Triang<sup>le</sup>  $IEL$  deux angles avec un côté, je connois l'élevation  $EL$ .

EUDOXE. Elevons-nous au-dessus des Nuages mêmes.

#### PROBLÈME XV.

84. *Mesurer la distance de Lune à la Terre.*

ARISTE. Soient  $G$ , la Lune soit  
 Fig. 37. l'Equateur ;  $AEG$  ligne droite supposée tirée du centre  $A$  de la Terre au centre  $G$  de la Lune  $B$ , un Observateur à Paris, par exemple ;  $BG$ , rayon visuel  $EB$ , arc du grand cercle de

Terre EBF, arc, dis-je connu  $= 49$  degrés, par exemple; AB, demi-diamètre terrestre connu (*a*); CD, Tangente & diamètre de l'Horison sensible, faisant avec le demi-diamètre AB un angle droit ABD\*; DBG, angle\* N. 7. fait par le diamètre DB de l'Horison & le rayon visuel BG, & mesuré par l'Observateur B.

Ainsi, dans le Triangle GAB; l'on connoît, 1°. L'angle BAG  $=$  BAE, qui a pour mesure l'arc EB connu. 2°. L'angle obtus ABG, formé de l'angle droit ABD, & de l'angle DBG mesuré. 3°. Le côté AB.

Or connoissant deux angles & un côté, on connoît le reste\*. \*N. 64.

Je dis donc: si le Sinus de l'angle en G donne tant de lieues pour le demi-diamètre AB de la Terre, combien le Sinus du supplément de l'angle obtus ABG, pour le côté

(a) Géométrie, N. 399.

### 394 III. ENTRETIEN.

\*N.63. AG ? Voilà donc AG connu\*.

659. De AG, ôtez AE, demi-diamètre terrestre : reste  $EG = 90000$  Lieues, environ, distance de la Lune à la Terre.

Enfin, je dis : si le Sinus de l'angle G donne tant pour le côté AB, combien le Sinus de l'angle BAE pour le côté BG ? & je connois BG, distance de la Lune à Paris.

85. EUDOXE. *Essayerons - nous de mesurer la distance même AB de la Terre au Soleil ?*

ARISTE. Il y en a qui s'y prennent de la forte, ou à peu près :

Fig. 38. Soient A le Soleil ; B, un Observateur sur la Terre ; C, la Lune demi-pleine ; BC, distance connue de la Lune à la Terre\*.

\*N.84. 1°. Le rayon AC qui va du centre du Soleil au centre C du disque de la Lune, est perpendiculaire sur le rayon visuel BC : car si le rayon AC étoit incliné en en

haut, comme GC, la Lune ne paroîtroit pas demi-pleine à l'Observateur B, puisque la partie ICK ne paroîtroit pas. Si le rayon AC étoit incliné en en bas, comme HC, la Lune paroîtroit plus que demi-pleine, puisque la partie FCK paroîtroit.

Ainsi, l'angle ACB est droit.

2°. L'angle B formé par les deux rayons visuels de l'Observateur, observant la Lune & le Soleil, est presque droit aussi; & l'angle en A se trouve à peine de 6" ou 10".

Ainsi, connoissant les angles C, B, A, du Triangle ABC, avec un côté BC, qui est la distance de la Terre à la Lune; on dit: si le Sinus de l'angle A donne tant de Lieues pour le côté BC, combien le Sinus de l'angle C pour le côté AB? & le quatrième terme de la Proportion est la distance AB de la Terre au Soleil.

396 IV. ENTRETEN

*EUDOXE.* Et c'en est bien assez ;  
Ariste , pour voir votre pensée sur  
la manière de prendre les distan-  
ces.

*ARISTE.* Voulez-vous, Eudoxe,  
que sans nous élever si haut , nous  
mesurons dans un entretien par-  
ticulier les Plans irréguliers ?

*EUDOXE.* Très-volontiers.

IV. ENTRETEN.

*Sur la mesure des Plans irréguliers.*

*ARISTE.* **P**OUR mesurer nos  
Plans, Eudoxe, nous  
avons besoin de la lumière de  
quelques Propositions qui deman-  
dent de l'attention.

*EUDOXE.* Mon attention n'est  
pas épuisée ; & vous sçavez ,  
Ariste , que lorsqu'il s'agit de vous  
voir développer des vérités certai-  
nes , rien ne me fatigue.

ARISTE. Suivons donc notre  
Système.

# PROPOSITION I.

86. Dans un Triangle BCD, *Fig. 391*  
la somme de deux côtés inégaux BC,  
CD, est à leur différence, comme  
la Tangente de la moitié de la somme  
des deux angles CBD, CDB, op-  
posés à ces deux côtés, est à la Tan-  
gente de la moitié de la différence de  
ces angles.

1°. Du sommet C, intervalle  
CD, je décris un cercle DEF, &  
prolonge l'autre côté CB en F &  
en E.  $BE = CB + CD$ , puisque  
 $CE = CD$ , & BF est la différen-  
ce de CB, CD, puisque  $CB + BF$   
 $= CD$ , rayon.

2°. Joignez F, D, plus D, E:  
l'angle FDE est droit (a) étant ins-  
crit & appuyé sur le diamètre FE;

(b) Géométrie, N. 115.

donc DE est perpendiculaire sur FD (a).

3°. De F, je décris, l'arc DH:  
 \* N. 7. donc DE, Tangente de l'arc DH\*,  
 l'est de l'angle DFE.

4°. De D, décrivez l'arc FI;  
 & tirez FG parallèle à la perpen-  
 diculaire DE sur le prolongement  
 BG de DB: donc FG étant per-  
 pendiculaire, aussi-bien que DE  
 parallèle, est Tangente de l'arc  
 FI, ou de l'angle FDI = FDB.

5°. Cela posé; l'angle extérieur  
 DCE vaut la somme des deux in-  
 térieurs opposés CBD, BDC (b):  
 donc l'angle inscrit DFE, moitié  
 de l'angle au centre DCE (c), est  
 moitié de la somme des angles  
 CBD, BDC: donc DE, Tan-  
 gente de l'angle DFE, l'est de la  
 moitié de la somme des angles  
 CBD, BDC.

(a) Géométrie, N. 96.

(b) Ibid. N. 129.

(c) Ibid. N. 116.



6°. Le Triangle DCF est isocèle, puisque  $CF = CD$  : donc l'angle  $CFD = CDF$  (a) : ainsi, l'angle extérieur  $CBD = BFD + BDF$ , &  $BFD = BDC + BDF$  : donc l'angle  $CBD = BDC + 2BDF$  : donc  $2BDF$  est la différence des angles  $CBD$ ,  $BDC$ .

Donc l'angle  $BDF$  ou  $IDF$  est moitié, & par conséquent,  $FG$  Tangente de la moitié de la différence des angles  $CBD$ ,  $BDC$ .

De-là, il suffit de prouver que  $BE. BF :: DE, FG$ .

Or l'angle  $BFG = BED$  alterne (b) ; l'angle  $FBG = DBE$  opposé au sommet, & par conséquent l'angle  $BGF = BDE$  : donc les deux Triangles  $BGF$  &  $BED$  sont semblables (c) : donc ayant leurs côtés homologues propor-

(a) Géométrie, N. 127.

(b) Ibid. N. 101.

(c) Ibid. N. 133.

400 IV. ENTRETEN  
tionnels (a), BE. BF :: DE. FG.

PROPOSITION II.

87. Dans un Triangle BCD ;  
Fig. 40. dont l'on connoît les trois côtés , la  
base BD est à la somme des deux au-  
tres côtés BC , CD , comme la diffé-  
rence de ces deux côtés BC , CD ,  
est à la différence des segmens BE ,  
ED de la base coupée par une perpen-  
diculaire CE abaissée du sommet C  
de l'angle opposé.

Du sommet C , décrivez un  
cercle ayant pour rayon le côté  
 $CD > CB$ .

Prolongez l'autre côté CB de  
part & d'autre en F , G , jusqu'à la  
circonférence , aussi bien que le  
côté DB.

Tirez les lignes FD , GH , &  
la perpendiculaire CE.

1°. Puisque  $CF = CD$  , rayon ,  
BF est la somme des deux côtés  
CB , CD ; & BG en est la diffé-  
rence.

(a) Géométrie , N. 150.

2°.

2°. HD étant divisée en deux parties égales par la perpendiculaire CE (a), BH est la différence des deux segmens BE, ED.

Il faut donc prouver précisément que  $BD. BF :: BG. BH$ .

Or les deux Triangles BGH, BDF sont semblables (b), puisque les angles au sommet B sont égaux, & que les angles BHG, BFD, appuyés sur même arc GD le sont (c):

Donc  $BD. BF :: BG. BH$  (d).

88. EUDOXE. On vous donne, Ariste, les trois côtés d'un Triangle Fig. 402. BCD; il faut trouver la valeur d'un segment de la base coupée par la perpendiculaire abaissée du sommet.

ARISTE. Je dis: Comme la base BD est à la somme des deux autres côtés CD, CB; ainsi la différen-

(a) Géométrie; N. 60.

(b) Ibid. N. 133.

(c) Ibid. N. 115.

(d) Ibid. N. 150.

402 IV. ENTRETEN

ce BG de ces deux côtés est à la différence BH des deux segmens

\*N. 87. BE, ED \* ; & j'ai cette différence BH dans le quatrième terme de la proportion (a).

2°. J'ajoute la différence BH à la base connue BD ; & j'ai la ligne HD.

3. Je prens la moitié de cette ligne coupée en deux parties égales par la perpendiculaire CE (b) ; & c'est le plus grand segment ED.

Enfin, ayant le plus grand segment ED de la base connue, j'ai le plus petit EB.

EUDOXE. D'ailleurs connoissant le plus grand segment, la différence connue vous donnera le plus petit.

Fig. 40. 89. *Mais connoissant les trois côtés d'un Triangle BCD, il faut trouver les trois angles.*

ARISTE. Hé bien ; soit la per-

(a) Calcul Littéral, N. 137.

(b) Géométrie, N. 60.

SUR LA TRIGON. RECTIL. 403  
pendiculaire CE abaissée du som-  
met C sur la base BD.

1°. Je connois un segment  
ED \*. \*N. 88.

2°. Connoissant donc dans le  
Triangle rectangle ECD, le côté  
ED, le côté donné CD, & l'angle  
droit CED fait par la perpendicu-  
laire CE & opposé à ce côté, je  
connois l'angle DCE, & par con-  
séquent l'angle CDE \*. \*N. 89.

3°. Je connoîtrai de même  
l'angle CBE, qui me donnera le  
troisième BCD.

EUDOXE. On peut dire, ce me  
semble, ED est à CD comme le  
Sinus total est à la Sécante; &  
connoissant ainsi la Sécante de  
l'angle D, on aura l'angle même \*. \*N. 90.  
On aura de même l'angle CBE,  
& par conséquent l'angle BCD.

90. Mais il s'agit de trouver la  
grandeur d'un Plan triangulaire in-  
accessible, d'un Lac, par exemple,  
dont l'on connoît les trois côtés.

Il s'agit

# 404 IV. ENTRETEN

Fig. 40. *ARISTE.* Soit le Plan, ou le Lac triangulaire BCD ; 1°. J'ima- gine une perpendiculaire CE ti- rée du sommet C sur la base BD, faisant avec la base un angle droit

\*N. 87. CED \*.

2°. Je prens la valeur du plus

\*N. 88. grand segment ED \*.

3°. Connoissant deux côtés CD, ED, & un angle du Trian- gle rectangle ECD, je connois

\*N. 65. le reste \*, & par conséquent la perpendiculaire CE.

4°. Le produit de la base BD par la moitié de la perpendi- culaire CE, fera la surface du Lac (a).

*EUDOXE.* Enfin, l'on vous donne précisément les trois côtés d'un Plan triangulaire : & il est question de trouver la surface sans le secours d'une perpendiculaire abaissée du som- met d'un angle sur la base.

*ARISTE.* Deux Propositions.

(a) Géométrie, M. 189.

SUR LA TRIGON. RECTIL. 405  
nous donneront la résolution du  
Problème..

PROPOSITION I.

91. *Un Plan triangulaire ABC* Fig. 41.  
*est le produit de la moitié de ses trois*  
*côtés par le rayon DE d'un cercle*  
*EFG inscrit au Triangle.*

1°. Je divise chacun des angles  
A, C, B, du Triangle ABC en  
deux parties égales par les lignes  
AD, CD, BD, & je démontre  
que ces lignes se rencontrent en  
un même point D.

Ou, ce qui revient au même,  
je démontre, que si du point D,  
auquel se rencontrent les lignes  
AD, CD, qui divisent les angles  
A, C en deux parties égales, on  
tire la ligne DB au sommet B de  
l'angle ABC, elle divisera cet an-  
gle en deux angles égaux ABD,  
CBD.

Du point D j'abaisse les perpen-  
diculaires DG, DF, DE, sur les

#### 406 IV. ENTRETIEN

côtés AC, CB, AB.

Les Triangles ADE, ADG ont chacun un angle droit  $G = E$ , le côté AD commun, & l'angle  $EAD = GAD$ : donc le côté  $AE = AG$ , & la perpendiculaire  $DE = DG$ .

Par la même raison les Triangles CDF, CDG auront le côté  $CF = CG$  & la perpendiculaire  $DF = DG$ .

Enfin les Triangles BDF, BDE ont le côté  $DF = DE$ , puisque  $DF = DG = DE$ , le côté DB, commun & chacun un angle droit  $F = E$ . Donc l'angle ABD

\*N<sup>os</sup>. = CBD\*.

2°. Ainsi puisque les perpendiculaires DG, DF, DE sont égales, si du point D l'on décrit un cercle qui ait une de ces perpendiculaires pour rayon, il sera inscrit au Triangle ABC; & si du même point D on tire aux sommets A, B, C, angles du Trian-



gle ABC, les lignes DA, DB, DC, elles le diviseront en trois Triangles ADB, ADC, BDC qui auront tous trois une même hauteur  $DE=DF=DG$ , rayons du cercle inscrit, & qui pris ensemble sont égaux au Triangle ABC.

3°. Enfin les trois Triangles ADB, ADC, BDC, pris ensemble, sont égaux à un Triangle qui ait, comme eux, pour hauteur le rayon  $ED=DF=DG$ , & pour base la valeur des trois côtés AB, BC, AC (a).

Or le Plan de ce Triangle est le produit de la moitié de sa base par sa hauteur; & cette moitié est la moitié des trois côtés.

Donc un Plan triangulaire est le produit de la moitié de ses trois côtés par le rayon d'un cercle inscrit.

(a) Géométrie, N. 190.

(b) Ibid. N. 189.

## PROPOSITION II.

*Fig. 42. 22. La surface ABC d'un Triangle est égale à la racine quarrée du produit fait de la moitié de la somme des trois côtés multipliée par le produit de leurs trois différences à cette même moitié.*

Soient ABC, Triangle circonscrit (a); DE, DF, DG, rayons perpendiculaires sur AB, BC, AC; AD, BD, CD partageant les angles par le milieu\*; la Tangente AE = AG, BE = BF, CF = CG\*, AI = CG, CK = AG, IH = CK, IL perpendiculaire sur AI; BL, coupant l'angle HBK par le milieu; enfin, HL, LK, AL, CL.

Donc 1°. BI = BK, puisque BE = BF, AE = AG = CK, AI = CG = CF.

2°. BI est moitié des trois côtés AB, BC, AC: car des six par-

(a) Géométrie, N. 142.

ties

ties faites par les trois rayons, BI en contient trois,  $BE = BF$ ,  $EA = AG$ ,  $AI = CG$ ; & BK les trois autres,  $BF = BE$ ,  $FC = CG$ ,  $CK = AG$ ; &  $BI = BK$ .

3°. BI est formée des trois différences BE, EA, AI des trois côtés à la moitié BI de la somme des trois côtés : car BE est la différence de  $AC = EI$  à BI; EA, la différence de BC à BI, puisque  $BC = BI - AE$ ; AI, la différence de AB à BI.

Cela posé; je dis que la surface triangulaire  $ABC = \sqrt{BI \times BE \times AE \times AI}$ .

1°. Les Triangles ILB, KLB; sont égaux, puisque le côté  $BI = BK$ , que BL est commun, & que les angles compris IBL, LBK, sont égaux, par la construction (a): donc le Triangle ILB étant rectangle en I, KLB l'est en K.

(a) Géométrie, N. 136.

Ainsi,  $LK = IL$  est perpendiculaire sur  $BK$ .

Les deux Triangles  $IHL, KLC$  sont égaux de même, puisque  $IL = LK$ ,  $IH = KC$ , & que l'angle compris  $HIL = CKL$  droit.

Donc  $LC = HL$ , comme  $AH = AC$ : donc les deux Triangles  $ALH, ALC$ , sont égaux; ayant, chacun, deux côtés égaux, & un côté  $AL$  commun (*a*): donc ils ont leurs angles homologues égaux: donc l'angle  $HAL = CAL$ , ou  $IAL = LAG$ .

2°. Les angles en  $E, G$ , étant droits, ou faits par des perpendiculaires, les angles  $EDG, EAG$ , valent, pris ensemble, deux droits, puisque le quadrilatere  $AEDG$  vaut quatre droits (*b*): donc les deux angles  $EDG, EAG$ , valent, pris ensemble, les deux  $EAG, IAG$  formés par l'oblique

(a) Géométrie, N. 134.

(b) Ibid. N. 175.

AG (a). Ainsi, ôtez de chaque côté l'angle commun EAG; reste l'angle  $EDG = IAG$ . Donc l'angle ADE, moitié de EDG, est égal à l'angle IAL, moitié de IAG.

De-là, les deux Triangles AED, AIL sont semblables (b).

Donc  $ED. AE :: AI. IL$  (c).  
Donc  $ED \times IL = AE \times AI$  (d).

3°. Les angles E, I, étant droits, ED, IL sont parallèles (e), & les Triangles BDE, BLI sont semblables (f), car l'angle B est commun.

Donc  $BE. BI :: ED. IL$  (g).

Or  $ED. IL :: ED \times ED. ED \times IL$  (h), puisque l'antécédent

(a) Géométrie, N. 97.

(b) Ibid. N. 133.

(c) Ibid. N. 150.

(d) Calcul Littéral, N. 135.

(e) Géométrie, N. 44.

(f) Ibid. N. 133.

(g) Ibid. N. 150.

(h) Calcul Littéral, N. 143.

412 IV. ENTRETIEN

d'une raison est à son conséquent ;  
comme le carré de l'antécédent  
est au plan de l'antécédent par le  
conséquent. Donc  $BE. BI :: ED$   
 $\times ED. ED \times IL$  : ou  $BE. BI ::$   
 $\overline{ED}^2. ED \times IL$ .

Mais  $ED \times IL = AE \times AI$  ;  
donc  $BE. BI :: \overline{ED}^2. AE \times AI$ .

Donc  $BI \times \overline{ED}^2 = BE \times AE$   
 $\times AI$  (a) : donc  $BI \times \overline{ED}^2 \times BI =$   
 $BE \times AE \times AI \times BI$  (b) : donc  $\overline{BI}^2$   
 $\times \overline{ED}^2 = BI \times BE \times AE \times AI$ .

Or la racine carrée de  $\overline{BI}^2 \times$   
 $\overline{ED}^2$  est  $BI \times ED$  (c).

Donc  $BI \times ED = \sqrt{BI \times BE}$   
 $\times AE \times AI$ .

Mais enfin , la surface triangulaire  
\*N. 91. laire  $ABC = BI \times ED$  \*.

(a) Calcul Littéral, N. 135.

(b) Ibid. N. 147.

(c) Ibid. N. 22.

Donc la surface triangulaire  
 $ABC = \sqrt{BI \times BE \times AE \times AI}.$

## PROBLÈME I.

93. Connoissant précisément les *Fig. 42.*  
trois côtés d'un Plan triangulaire  
ABC, en trouver la surface sans  
tirer une perpendiculaire du sommet  
d'un angle sur la base.

1°. Je prens la moitié BI de la  
somme des trois côtés AB, BC,  
AC.

2°. Je prens les différences BE,  
AE, AI, des trois côtés AB,  
BC, AC à cette moitié BI.

3°. Je multiplie ces différen-  
ces BE, AE, AI, les unes par  
les autres; & j'ai le produit  $BE$   
 $\times AE \times AI.$

4°. Je multiplie la moitié de  
la somme des trois côtés par ce  
produit, c'est-à-dire, BI par  
 $BE \times AE \times AI$ ; & j'ai le produit  
total  $BI \times BE \times AE \times AI.$

M m iiij

# 414 IV. ENTRETEN

Enfin , je prens la racine quar-  
rée de ce produit total ; & cette  
racine , ou  $\sqrt{BI \times BE \times AE \times AI}$  ,  
est la surface ou le Plan triangu-  
•N.92. laire qu'il falloit trouver \*.

*EUDOXE.* La résolution d'un  
Problème si compliqué vous en  
attire un autre à résoudre.

## PROBLÈME II.

*Fig. 43.* 94. *Trouver la surface d'un Plan*  
*ABCDEF à la portée de la vue ,*  
*mais irrégulier, Poligone & inaccess-*  
*fible , dont l'on connoisse les côtés &*  
*les angles.*

*ARISTE.* Soit le Plan réduit en  
Triangles ACB , ADC , AED ,  
AFE (a).

Dès que l'on connoît deux cô-  
tés d'un Triangle , & l'angle com-  
pris , on connoît le troisième cô-  
\*N.71 té & les autres angles \*.

• 72. Ainsi , 1°. Connoissant les deux  
(a) Géométrie , N. 234.



SUR LA TRIGON. RECTIL. 415  
 côtés AB, BC, & l'angle compris ABC, je connois la base AC\*; or connoissant les trois côtés d'un Plan triangulaire, je connois & les angles\* & la surface\*. \*N.72.  
\*N.89.  
\*N.90.

2°. Connoissant l'angle BCD, & l'angle BCA, je connois l'angle ACD. Or connoissant les côtés AC & CD avec l'angle compris, je connois encore la base AD, & le Plan triangulaire ADC.

J'aurai de même les autres Plans triangulaires AED, AFE\*: enfin, la somme de ces Plans fera  $\phi$  72. le Plan total. \*N.71.

95. *EUDOXE*. Mais si l'on connoît précisément les côtés du Polygone.....

*ARISTE*. On pourra prendre la base AC du Triangle ACB\*; & connoissant les trois côtés AB, BC, AC, on aura la surface\*. Fig. 43.  
\*N.76.  
\*N.93.

Mm iiij

On aura de même les autres Plans triangulaires ADC, &c.

Essayerons-nous, Eudoxe, de lever un Plan ou une Carte.

EUDOXE. Le plutôt qu'il se pourra.

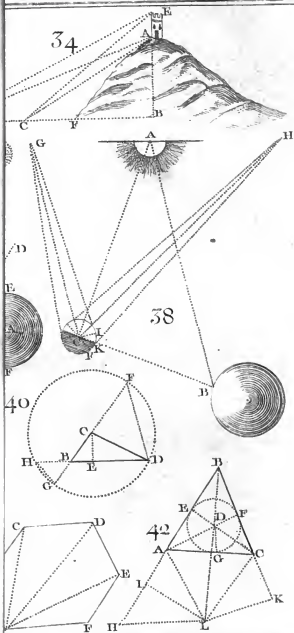
## V. ENTRETIEN.

*Sur la manière de lever une Carte.*

EUDOXE. Vous allez donc, Ariste, lever la Carte de quelque vaste contrée sans sortir de votre Cabinet.

ARISTE. Carte en idée : en un mot, vous allez voir, du moins, une idée légère d'un art, qui dans l'enceinte d'un petit Cabinet présente à nos yeux mille contrées différentes.

96. D'abord, qu'est-ce que lever la Carte d'une contrée? C'est





placer sur le papier divers endroits qu'elle renferme, leur donnant sur le papier les rapports des distances qu'ils ont sur le terrain : c'est réduire le grand en petit. Et on le fait en déterminant par le moyen de la Géométrie & de la Trigonométrie, la valeur des angles & des côtés des Triangles formés par les distances, & en traçant sur le papier des angles égaux aux premiers, avec des côtés plus petits, mais proportionnels.

Les angles fort obtus ou fort aigus, n'étant pas assez sensibles, on les évite.

27. Les Cartes générales ne comprennent que la figure des chemins avec la position des lieux les plus considérables. Les Cartes particulières contiennent tout ce qui peut avoir lieu dans une Carte, les chemins, la grandeur & la figure des Villes, des Bourgs, & des Villages, les Rivières avec

les Ponts , les Bois ; les Chapelles , &c.

*Fig. 44.* 98. On sçait qu'Echelle est une ligne divisée en un certain nombre de parties qui disent tant de grandeurs égales , de toises , par exemple , ou de lieuës.

99. Enfin , prendre une base , c'est faire d'une distance connue le côté d'un Triangle ou de plusieurs Triangles.

Cela supposé ;

### PROBLÈME I.

100. *Lever une Carte générale.*

1°. J'établis une base , la plus grande qu'il soit possible , c'est-à-dire , que je choisis une distance qui puisse être la base ou le côté du plus grand nombre de Triangles qu'il se peut \*.

\*N. 99.

*Fig. 45.* Soient , par exemple , les points de Station B , C : je mesure la di-

stance BC ; & j'en fais la base ou le côté des Triangles que je vais employer.

2°. D'une extrémité C de la base BC, je prens avec un quart de cercle la grandeur des angles formés par la base BC & par les distances CD, CE, &c. des lieux. Je prens donc les angles BCN, BCD, BCE, BCF, passant le point G, parce que l'angle BCG seroit trop obtus ; puis, je prens les angles BCH, BCI, BCK, BCL, passant le point M, parce que l'angle BCM seroit trop aigu.

3°. Pour avoir la position des endroits N, D, E, F, &c. je coupe les rayons que j'ai tirés. Ainsi de l'autre extrémité B de la base BC, je prens l'angle CBF, par exemple, fait par BC, & BF coupant le rayon CF ; & j'ai le point F : car connoissant dans le Triangle BCF le côté BC, & deux angles BCF, CBF, j'ai les

côtés ou les distances CF &

\*N.65. BF\*.

4°. Coupant de même les autres rayons, je prens les angles CBE, CBD, CBN, CBH, CBI, CBK, CBL ; & connoissant tous les angles des Triangles formés par les rayons coupés, avec un côté commun BC, je connois tous les côtés, ou toutes les distances me-

\*N.65. surées par ces côtés\*.

5°. Mais j'ai passé deux endroits G, M. Comment en trouver la position indépendamment de la base BC ?

Pour prendre G, on peut prendre pour base la distance BH, ou une autre plus convenable ; je prens le côté CF ; & après avoir pris du point C l'angle FCG, je prens du point F l'angle CFG.

Or ayant deux angles & un côté CF, dans le Triangle FGC, je connois CG & FG.

Pour trouver le point M, je



fais de même. Du point B , je prens l'angle MBN ; & du point N , l'angle BNM ; & j'ai MN & BM \*.

\*N.65.

6°. Quand j'ai de la sorte la valeur de tous les côtés des Triangles , je rapporte ces côtés sur le papier , donnant à chaque ligne sa valeur proportionnelle par le moyen d'une Echelle \* , & lui fai-

\*N.98.

7°. Après avoir rapporté ces positions , il s'agit de continuer à lever les lieux découverts des extrémités du Plan déjà levé ; & je suis la même méthode , prenant pour bases les extrémités connues de ce Plan. Ainsi , pour lever les endroits situés au-delà des points D , N , je prens pour base la distance connue DN.

## PROBLÈME II.

101. *Lever une Carte particulière.*

1°. Je fais le canevas comme

\* N. la Carte générale \*.

101.

2°. Je réduis le Plan de chaque Ville à l'Echelle de la Car-

\* N. 98. te \*.

3°. Je prens la grandeur , la figure & la situation des Bourgs , des Villages , des Hameaux , la forme des ruës , des Chemins avec les Montagnes des environs.

4°. S'il y a des Bois ou des Forêts , je leve d'abord les Hameaux & les Villages les plus proches , dont les distances me don-

\* N. 99. nent des bases \*. Ces bases font une sorte de Poligone ; & je rapporte à ce Poligone un certain nombre de points qui servent à

marquer les limites du Bois ou de la Forêt.

Enfin, de quelque éminence hors du Bois, je prens des points de position dans le Bois. Ces points sont des Châteaux, des Clochers ou de grands arbres. Et à la faveur de ces points, j'orienter les divers endroits du Bois, réduisant le tout par le moyen de l'Echelle\*.

\* N. 96.

*EUDOXE.* Mais, Ariste, comment prenez vous le Plan d'une Ville, ou d'une place ABCDEF, où l'on puisse entrer ? Fig. 46.

*ARISTE.* 1°. Je prens la longueur de chaque côté AB, BC, &c. avec la longueur de chaque ligne AE, EB, EC, tirée d'angle à angle.

2°. Par le moyen d'une Echelle, par exemple de 100 parties, je rapporte en petit sur le papier ces côtés & ces lignes, faisant d'abord un petit Triangle *aef*,

qui a ses côtés proportionnels aux côtés du grand Triangle AEF correspondant ; puis, un autre petit Triangle *abe*, &c. & j'ai en petit une figure *abcdef*, qui est semblable à la place ABCDEF, puisque la figure contient autant de Triangles que la place (a), & que les Triangles de l'une sont semblables aux Triangles de l'autre (b) : car deux Triangles sont semblables dès qu'ils ont leurs côtés proportionnels.

EUDOXE. Mais si c'est une place où l'on ne puisse entrer....

ARISTE. 1°. Je prends les côtés & les angles.

2°. Je rapporte ces côtés & \*N.96. ces angles sur le papier\*, en sorte que les angles correspondants soient égaux, & les côtés qui comprennent les angles égaux,

(a) Géométrie, N. 234.

(b) Ibid. N. 159

proportionnels ;

SUR LA TRIGON. RECTIL: 425  
proportionnels ; & j'ai un Polygone *abcdef*, semblable à la place ABCDEF (*a*), Polygone qui pourra se réduire en autant de Triangles semblables, puisque les Polygones semblables se réduisent en Triangles semblables (*b*).

EUDOXE. Ainsi, à la lumière du Calcul, de la Géométrie & de la Trigonométrie, l'on parvient à des usages où l'utile & l'agréable se rencontrent.

Enfin, Ariste, vos idées sur les Nombres, sur le Calcul littéral, sur la Géométrie & la Trigonométrie, m'ont paru justes, nettes, précises, suivies ; & avec ces lumières on peut, ce semble, pénétrer avec agrément dans ce qu'il y a dans les Mathématiques de plus curieux & de plus utile en même temps.

(*c*) Calcul Littéral, N. 233.

(*b*) Ibid. N. 256.

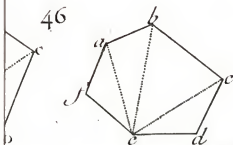
*ARISTE.* Le plus grand agrément que les Mathématiques puissent me procurer , Eudoxe , ce sera de m'entretenir avec vous sur les choses qui s'y trouveront le plus de votre goût & du mien.

*Fin du Tome second.*





46







---

## A P P R O B A T I O N.

**J'**Aylû par Ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit intitulé : *Entretiens Mathématiques sur les Nombres, l'Algèbre, &c.* Par le R. P. REGNAULT : Et je n'y ai rien trouvé qui en puisse empêcher l'impression. A Paris ce 19. Février 1742.

CLAIRAUT.

---

## P R I V I L E G E D U R O Y.

**L**OUIS, par la Grace de Dieu, Roy de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de Notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT; Notre bien amé MICHEL-ANJOINE DAVID, Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public, l'*Histoire abrégée des Troubles arrivés en Portugal dans le temps du détronement du Roy Alphonse; Entretiens Mathématiques sur les Nombres, l'Algèbre, &c.* par le P. Regnault. Leçons d'Hydrostatique & d'Aérométrie, par M. Côtes; s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaire. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes de fai-

N n ij

re imprimer les Ouvrages cy-dessus spécifiés ; en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de douze années consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentations, corrections, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits & de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris & l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modèle sous le contre-scel desdites présentes ; que l'Impetrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725 ; & qu'avant que de

les exposer en vente, les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, es mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre & un dans celle de notre dit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposé & ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Sécrets, soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier, ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le 8. jour du mois de Juin, l'an de grace mil sept cens quarante-deux, & de notre Règne le vingt-septième. Par le Roy en son Conseil,

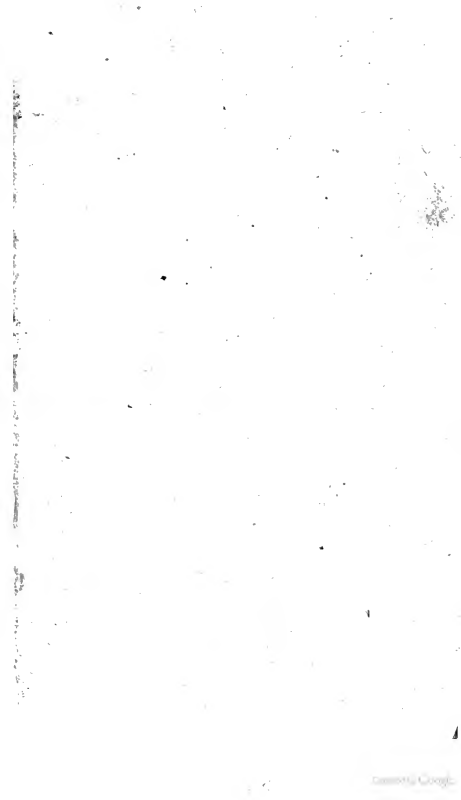
SAINSON.

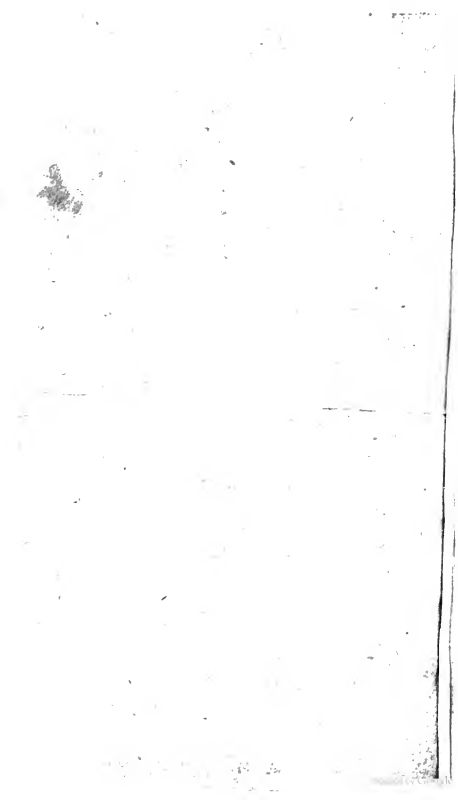
*Registré sur le Registre de la Communauté  
des Libraires & Imprimeurs de Paris N°. 2428.  
conformément aux Réglemens, & notamment à  
l'Arrêt de la Cour du Parlement du 3. Décembre  
1705. A Paris ce 12 Juin 1742.*

SAUGRAIN, Syndic.



AAAAAAA  
2549744A  
VVVVVVVV





B.5.5.589



0 2 5 4 9 7 1 1







